

Jelölje a kúp csúcsát A , magasságának talppontját C , a gömb középpontját O , sugarát ϱ , az alapkör sugarát r , és legyen $AO = x$.

$$\text{A kúp térfogata: } V_k = \frac{r^2 \pi m}{3}.$$

$$\text{A gömb térfogata: } V_g = \frac{4\varrho^3 \pi}{3}.$$

Így $\frac{V_g}{V_k} = \frac{4\varrho^3}{r^2m}$. Az ABC és az AOD derékszögű háromszögekből $r = (x + \varrho) \operatorname{tg} \alpha$; innen $x = \frac{\varrho}{\sin \alpha}$ helyettesítéssel

$$r = \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\varrho}{\sin \alpha} + \varrho \right) = \frac{\varrho(\sin \alpha + 1)}{\cos \alpha}, \quad m = x + \varrho = \frac{\varrho}{\sin \alpha} + \varrho = \frac{\varrho(\sin \alpha + 1)}{\sin \alpha},$$

ezért

$$\frac{V_g}{V_k} = \frac{4\varrho^3}{\left[\frac{\varrho(\sin \alpha + 1)}{\cos \alpha} \right]^2 \frac{\varrho(\sin \alpha + 1)}{\sin \alpha}} = \frac{4 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha)^3} = \frac{4 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha)^2}.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. A feladat eredményét más szögfüggvény felhasználásával is megkaphattuk volna. A különböző képletek egymásba alakíthatók a szögfüggvények közti összefüggések felhasználásával.