

Megmutatjuk, hogy a_n nem más, mint az $(1+x+x^2)^n$ polinomban x^n együtthatója. Jelöljük egyelőre c_n -nel az x^n együtthatóját az $(1+x+x^2)^n$ polinomban. Azt könnyű ellenőrizni, hogy $c_0 = a_0 = 1$ és $c_1 = a_1 = 1$. Mivel

$$(1+x+x^2)^n = x^n \left(1+x+\frac{1}{x}\right)^n = x^n \sum_{k=0}^n n \text{choose } k \left(x+\frac{1}{x}\right)^k,$$

ebből az alakból kiolvasható, hogy

$$(1) \quad c_n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} n \text{choose } 2k 2k \text{choose } k = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{n!}{k!^2 (n-2k)!}.$$

Az (1) azonosság egyszerű átrendezéseiből kapjuk, hogy

$$c_{n+1} = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \frac{(n-1)!}{k!^2 (n-2k+1)!} \cdot n(n+1), c_n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{(n-1)!}{k!^2 (n-2k+1)!} \cdot n(n-2k+1), c_{n-1} = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} \frac{(n-1)!}{k!^2 (n-2k-1)!} = \dots$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned} (2n+1)c_n + 3nc_{n-1} &= (2n+1)c_n + 4nc_{n-1} - nc_{n-1} = \\ &= \sum_{0 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \frac{(n-1)!}{k!^2 (n-2k+1)!} \cdot ((2n+1)n(n-2k+1) + 4nk^2 - n(n-2k)(n-2k+1)) = \\ &= \sum_{0 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \frac{(n-1)!}{k!^2 (n-2k+1)!} \cdot n(n+1)^2 = (n+1)c_{n+1}, \end{aligned}$$

vagyis az (a_n) és (c_n) sorozatokra ugyanaz a rekurzió teljesül.

Megjegyzések. 1. Egy polinom együtthatóit komplex függvénytanai eszközökkel is lehet kezelni. Például az $(x^2+x+1)^n$ polinomban x^n együtthatóját felírhatjuk a következő alakban:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{2it} + e^{it} + 1)^n e^{-int} dt.$$

Ebből a rekurzió parciális integrálással nyerhető. (A feladat innen származik.)

2. Lippner Gábor és Lukács László az $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ generátorfüggvény vizsgálatával egy érdekes azonosságot fedezett fel:

$$(2) \quad a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \dots + a_{n-1} a_1 + a_n a_0 = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}.$$

Nem nehéz végiggondolni, hogy F definíciója $|x| < \frac{1}{3}$ esetén értelmes, és ebben az intervallumban teljesül rá a

$$(3x^2 + 2x - 1)F'(x) + (3x + 1)F(x) = 0; \quad F(0) = 1$$

homogén lineáris differenciálegyenlet. Ezt megoldva $F(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-3x)(1+x)}}$,

$$F^2(x) = \frac{\frac{3}{4}}{1-3x} + \frac{\frac{1}{4}}{1+x} = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4} x^n.$$

Másfelől

$$F^2(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + \dots + a_n a_0) x^n,$$

és a függvény az együtthatókat egyértelműen meghatározza, ebből (2) következik.

Természetesen (2) bizonyításához nincs szükség analitikus eszközökre, teljes indukcióval is igazolható.

A (2) azonosságból a feladat állítása viszonylag egyszerűen következik.