

A tortát K ember között kell elosztani, egy ember $\frac{N^3}{K}$ kis kockát kap, és $\frac{6N^2}{K}$ darab 1×1 -es csokoládébevonatot. Ezeknek a törteknek egész számoknak kell lenniük, ezért ha K prím, akkor K osztója lesz N -nek.

Először megmutatjuk, hogy a kívánt felosztás minden $K \geq 2$ természetes számra elvégezhető. Tegyük fel egyelőre, hogy $K \geq 4$, és legyen $K = N$. Vágjuk fel a tortát függőleges síkokkal L darab „függőleges szeletre”. Az *ábra* bal oldalán lévő ilyen szeletet vastag vonallal rajzoltuk meg. A két szélső szelet $4K + K^2$, a többi (belső) szelet $4K$ bevonatot tartalmaz. Minden „függőleges szelet” K darab függőleges oszlopra vágható szét. Ezeket az oszlopokat három csoportba oszthatjuk: sarokoszlopok, fedőlapjukon S jelöléssel, élközép-oszlopok, fedőlapjukon E jellel; belső oszlopok B jelöléssel. Egy E jelű oszlopon K -val több bevonat van, mint egy B jelűn, egy S jelű oszlopon pedig K -val több, mint egy E jelűn. Ezután a tortát a K ember között úgy osztjuk el, hogy mindenki kap egy „függőleges szeletet”, és az a kettő, aki szélső szeletet kapott, a neki jutó $K - 2$ darab E jelű oszlopot elcseréli B jelűre azokkal, akik belső szeletet kaptak, vigyázva arra, hogy minden belső szeletben két oszlop cserélődjön ki. A csere lehetséges, mert $K \geq 4$ miatt $K - 2$ belső szelet van, és minden belső szeletben legalább két B jelű oszlop van. A cserék után a bevonatok száma mindegyik osztozkodónál $6K$ lesz. Ugyanis a két szélső szeletnél a bevonatok száma $K(K - 2)$ -vel csökkent, a belső szeleteknél pedig $2K$ -val növekedett.

Ha $K = 2$, a tortát 8 kis kockára vágva mindketten 4 ugyanolyan darabot kapnak. Könnyen megoldható a $K = 3$ eset is.

Mivel 1997 prím, és mint fent megállapítottuk, K osztója N -nek, a $K = 1997$ esetben legalább 1997^3 részre kell vágni a tortát.

Birkner Tamás (Budapest, Deutsche Schule, 5. évf.)

