

Jelölésünk szerint $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$; és mivel $a \geq b \geq c$, azért $z \geq y \geq x$. A bizonyítandó egyenlőtlenségekbe a , b és c helyére $y + z$ -t, $x + z$ -t és $x + y$ -t helyettesítve kapjuk, hogy

$$(y + z)z + (x + z)y + (x + y)x \geq \frac{(y + z)^2 + (x + z)^2 + (x + y)^2}{2} \geq (y + z)x + (x + z)y + (x + y)z.$$

Elvégezve a szorzásokat és $(yz + xz + xy)$ -t levonva kapjuk, hogy

$$x^2 + z^2 + xy + yz - xz \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

A jobb oldali egyenlőtlenség ismert, közvetlenül adódik a nyilvánvaló $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ egyenlőtlenség átrendezéséből. A bal oldali egyenlőtlenséget átrendezve:

$$xy + yz - xz - y^2 \geq 0, \quad \text{azaz} \quad (z - y)(y - x) \geq 0.$$

Esetünkben ez is teljesül, mert $z - y \geq 0$ és $y - x \geq 0$ feltételünk szerint. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezzel az eredeti egyenlőtlenséget is beláttuk.

Az is látszik, hogy a jobb oldali egyenlőtlenségben csak szabályos háromszög esetén van egyenlőség, míg a bal oldaliban $y = x$ vagy $z = y$ esetén, azaz ha a háromszög b oldala valamelyik másikkal egyenlő.

Deli Lajos (Hajdúszoboszló, Hőgyes E. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján

