

Jelöljük a megállók számát n -nel. Ekkor a megálló-párok száma $\binom{n}{2}$. Tudjuk, hogy bármely két megálló között van buszjárat, és hogy bármely két buszjáratnak 1 közös megállója van, tehát 2 megálló között pontosan egy buszjárat közlekedik. Mivel minden buszjáratnak 3 megállója van, ezért a buszjáratok száma $\frac{1}{3} \cdot \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{6}$, így a járatok páronkénti közös megállóinak száma

$$k = \binom{\frac{n(n-1)}{6}}{2} = \frac{\frac{n(n-1)}{6} \left(\frac{n(n-1)}{6} - 1 \right)}{2}.$$

Másrészt minden megállóban $\frac{n-1}{2}$ buszjárat áll meg (minden buszjáratához 2 másik megálló van), ezért minden megálló $\binom{\frac{n-1}{2}}{2} = \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2} - 1 \right)}{2}$ közös megállónak felel meg. Tehát $k = n \cdot \frac{\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} - 1 \right)}{2}$, vagyis

$$\frac{\frac{n(n-1)}{6} \cdot \left(\frac{n(n-1)}{6} - 1 \right)}{2} = n \cdot \frac{\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} - 1 \right)}{2}.$$

Ebből $n^2 - 10n + 21 = 0$, azaz $n = 3$ vagy $n = 7$.

Az $n = 3$ esetben 1 buszjárat van, amire nyilvánvaló a feladat állítása. Az $n = 7$ esetben 7 buszjárat van, amire a következő példát lehet mutatni:

Ha a buszmegállókát 1, 2, 3, ..., 7-tel jelöljük, akkor a következő buszjáratok kielégítik a feladat feltételeit:

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\}, \quad \{1, 4, 5\}, \quad \{1, 6, 7\}, \quad \{2, 4, 6\}, \\ \{2, 5, 7\}, \quad \{3, 4, 7\}, \quad \{3, 5, 6\}. \end{aligned}$$

Tehát 1 vagy 7 buszjárat lehet a városban.

Székelyhidi Gábor (Kuwait, New English School, 11. évf.)

Megjegyzés. A feladatbeli megállók járatonkénti csoportosítása speciális esete a következő típusú konfigurációknak. Tekintsünk egy n elemű halmazt és ennek bizonyos részhalmazait azzal a két tulajdonsággal, hogy

- (1) bármely két ilyen (különböző) részhalmaznak pontosan egy közös eleme van; és
- (2) bármely két (különböző) elemet véve a halmazban, pontosan egy olyan kijelölt részhalmaz létezik, amelynek mindkettő elemei.

Az (1) és (2) tulajdonságoknak eleget tevő halmazrendszereket – bizonyos, nyilvánvalóan triviális elrendezéstől eltekintve – *véges projektív síkoknak* nevezzük; a természetes geometriai analógia alapján a halmaz elemeit pontoknak, a kijelölt részhalmazokat egyeneseknek hívjuk. Könnyen belátható, hogy egy projektív sík egyenesének a száma ugyanannyi, mint a pontok száma, azaz n . Azt sem nehéz bizonyítani, hogy minden egyenesnek ugyanannyi pontja van – szokás ezt a számot $(q+1)$ -gyel jelölni – és ez a szám megegyezik egy tetszőleges ponton átmenő egyeneseknek a számával. Az is egyszerűen adódik ezután, hogy $n = q^2 + q + 1$.

Az úgynevezett véges testek felhasználásával konstruálni lehet véges projektív síkot minden olyan esetben, amikor q prímszám. Vannak azonban olyan síkok, amelyek ezzel az általános eljárással nem állíthatók elő. Olyan síkot azonban még senki sem talált, amelyben q ne lett volna prímszám. Ezzel kapcsolatos a véges matematika egy nevezetes, mindeddig megoldatlan problémája: milyen q értékekre létezik q -adrendű véges projektív sík (lehet-e q más is, mint egy prímszám egész kitevős hatványa)?

