

$n = 1$ -re az állítás triviálisan teljesül.

A továbbiakban feltesszük, hogy  $n \geq 2$  és  $\pi \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0$ ; (nem megy az általánosság rovására). Először lássuk be a következőt (ami éppen a feladat állítása  $n = 2$  esetén):

$$(1) \quad \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \leq 2 \cdot \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Alkalmazva az ismert azonosságot:

$$2 \cdot \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \leq 2 \cdot \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Ez viszont nyilván teljesül, hiszen

$$\cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \geq 0, \quad \text{mert} \quad 0 \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \leq 1.$$

Ezzel (1)-et bebizonyítottuk.

Legyen  $\alpha'_1 = \alpha'_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$  és  $\alpha'_i = \alpha_i$  ( $i > 2$ ). Ekkor  $\frac{\pi}{2} \geq \alpha'_1 \geq \alpha'_2 \geq \alpha'_3 \geq \dots \geq \alpha'_n \geq 0$ . Ezek után (1)-et alkalmazva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=3}^n \cos \alpha_i + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 \right) \leq \frac{1}{n} \left( \sum_{i=3}^n \cos \alpha_i + 2 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum \cos \alpha'_i \right) \leq \cos \left( \frac{1}{n} \sum \alpha'_i \right). \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőtlenség azért teljesül, mert a koszinusz-függvény  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ -ben konkáv és  $\alpha'_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .