

Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $a_9 \leq 100$.

Legyen S azoknak a legfeljebb öttagú összegeknek a halmaza, amelyek az $a_1, a_2, \dots, a_8$ számokból készíthetők, és nem kisebbek a_4 -nél. A legfeljebb öttagú összegek száma $\binom{8}{1} + \dots + \binom{8}{5} = 218$, ezek közül azok lehetnek kisebbek a_4 -nél, amelyekben csak a_1, a_2 vagy a_3 szerepel, összesen 7 darab. Tehát $|S| \geq 211$.

A legnagyobb összeg $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 < a_4 + 4a_9$, ezért mindegyik összeg az $I = [a_4; a_4 + 4a_9 - 1]$ intervallumba esik. Az $|S| > 2a_9$ egyenlőtlenség alapján S -nek létezik három olyan eleme, amelyek a_9 -cel osztva ugyanazt a maradékot adják. Mivel azonban I bármely két elemének különbsége kisebb $4a_9$ -nél, a három elem közül kettő különbsége pontosan a_9 . Ez azonban ellentmondás, mert a kisebbik összeghez a_9 -et adva a nagyobbikat kapjuk.

Kun Gábor (Budapest, Piarista Gimn., III. o.)

Megjegyzések. 1. Egy kis számolással ellenőrizhető, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_9$ számokból legalább 376 darab olyan összeg készíthető, amely biztosan $a_1 + a_4 + a_5$ és $a_1 + a_4 + a_5 + a_7 + a_8 + a_9$ közé esik. Ebből azonnal következik, hogy $a_7 + a_8 + a_9 \geq 375$ és $a_9 \geq 126$. Ez az eredmény még mindig messze van a lehetséges legjobbtól.

2. Többféle módszerrel, például az előző pontbeli ötlet általánosításával igazolható, hogy ha az $a_1, a_2, \dots, a_9$ számokból készíthető összegek mind különbözők, akkor $a_n > c \frac{2^n}{\sqrt{n}}$. Az is könnyen látható, hogy a 2-hatványok sorozatára teljesül a feltétel.

Erdős Pál azt sejtette, hogy megfelelő pozitív c konstanssal $a_n > c2^n$. Ennek bizonyításáért vagy megcáfolásáért 300 dollárt ajánlott fel. A probléma jelenleg még megoldásra vár.