

Jelölje kn 5-tel való osztási maradékát a_k , és legyen $kn = 5b_k + a_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$).

$x^{kn} - a^{a_k}$ osztható $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ -gyel, mivel

$$\begin{aligned} x^{kn} - a^{a_k} &= a^{a_k} \cdot (x^{5b_k} - 1) = x^{a_k} \cdot (x^5 - 1) \cdot (x^{5(b_k-1)} + x^{5(b_k-2)} + \dots + x^{5 \cdot 0}) = \\ &= x^{a_k} \cdot (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x^{5(b_k-1)} + x^{5(b_k-2)} + \dots + x^{5 \cdot 0}). \end{aligned}$$

Ennek alapján

$$x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1 - x^{a_4} - x^{a_3} - x^{a_2} - x^{a_1} - 1$$

osztható $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ -gyel.

Ha n nem osztható 5-tel, akkor az a_1, a_2, a_3, a_4 számok valamilyen sorrendben megegyeznek az 1, 2, 3, 4 számokkal. Így $x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ osztható $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ -gyel, s ez a kívánt oszthatósággal ekvivalens.

Ha n osztható 5-tel, akkor az a_1, a_2, a_3, a_4 számok mindegyike 0, így az $x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n - 4$ polinom osztható $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ -gyel. Ezért az $x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1$ polinom nem osztható $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ -gyel.