

Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelöljük a k_A és k_B körök középpontjait O_A -val, illetve O_B -vel, sugaraikat pedig r_A -val, illetve r_B -vel. Legyen az AB egyenesnek a k_A és k_B körökkel való A -tól és B -től különböző metszéspontja A' , illetve B' .

Mivel az AC és a BC egyenesek érintik a megfelelő köröket és $CAB \sphericalangle = CBA \sphericalangle = 60^\circ$, ezért az AA' és a BB' húrokhoz tartozó kisebbik érintőszárú kerületi szögek 60° -osak, így ezek a húrok a megfelelő középpontból $2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ -os szögben látszanak, azaz $AO_A A' \sphericalangle = BO_B B' \sphericalangle = 120^\circ$. A 2. ábráról leolvasható annak a bizonyítása, hogy az r sugarú k kör h húrja pontosan akkor látszik k középpontjából 120° -os szögben, ha h érinti a k -val koncentrikus $\frac{r}{2}$ sugarú kört. Vagyis az AB egyenes érinti az O_A középpontú $\frac{r_A}{2}$ sugarú kört is (mert AA' az O_A -ból 120° -os szögben látszik), és az O_B középpontú $\frac{r_B}{2}$ sugarú kört is (mert $BO_B B' \sphericalangle = 120^\circ$). Tehát az AB egyenes e két kör (egyik) közös érintője.

Ezek alapján a szerkesztés menete: Megszerkesztjük a k_A -val, illetve k_B -vel koncentrikus, feleakkora sugarú köröket, majd a két kis kör egyik közös érintőjét. Ezután megrajzoljuk a k_A és k_B köröknek a közös érintővel való metszéspontjaikban vett érintőit. E négy érintő közül kettő-kettő párhuzamos lesz. A különböző körökhöz tartozó nem párhuzamos érintők metszéspontjai a szerkesztendő szabályos háromszögek C csúcsait adják, míg a k_A , illetve k_B körön lévő érintési pontok az A , illetve B csúcsokat.

Az így szerkesztett ABC háromszögek eleget tesznek a feladat feltételeinek, mert $A \in k_A$ és $B \in k_B$; az A -ban k_A -hoz húzott érintő, illetve a B -ben k_B -hez húzott érintő az AB egyenessel 60° -os szöget zár be, ezért az ABC háromszögben $BAC \sphericalangle = ABC \sphericalangle = 60^\circ$, vagyis a háromszög szabályos.

Mivel a k_A és k_B körök egymáson kívül helyezkednek el, ezért a velük koncentrikus, feleakkora sugarú köröknek összesen négy közös érintőjük van. Minden egyes külső (3. ábra), illetve belső (4. ábra) közös érintőhöz két-két megoldás tartozik, ezért a feladatnak minden esetben nyolc megoldása van.

Megjegyzés. A nyolc darab háromszög C jelű csúcsainak mindegyikére igaz, hogy belőle a k_A és a k_B körhöz egyenlő hosszúságú érintők húzhatók. Ezért a nyolc pont mindegyike rajta van a k_A és k_B körök hatványvonalán, vagyis a nyolc pont egyenesen van.

Barát Anna (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., II. o. t.)



