Legyen az n prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$. Tetszőleges $k \le \alpha_j$ és $1 \le j \le t$-re

$$\binom{n}{p_j^k} = \frac{n}{p_j^k} \cdot \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-(p_j^k-1)}{p_j^k-1}.$$

Megmutatjuk, hogy $\binom{n}{p_j^k}$ nem osztható $p_j^{\alpha_j+1-k}$-nal. Tegyük fel, hogy az egyik $\frac{n-i}{i}$ tényező számlálója osztható p_j^v-vel. A v értéke nem lehet α_j vagy annál nagyobb, hiszen akkor $p_j^{\alpha_j}$ osztaná $(n-i)$-t és n-et, ezért i-t is, ami $1 \le i \le p_j^k - 1 \le p_j^{\alpha_j} - 1$ miatt lehetetlen. Így p_j^v osztója n-nek is, emiatt pedig $i = n-(n-i)$-nek, a tört nevezőjének is. Ezért, ha az $\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-(p_j^k-1)}{p_j^k-1}$ törtet egyszerűsítjük, a kapott tört számlálója nem lesz p_j-vel osztható. Mivel $\frac{n}{p_j^k}$ nem osztható $p_j^{\alpha_j+1-k}$-nal, állításunkat igazoltuk. Speciálisan kapjuk, hogy $\binom{n}{p_j^{\alpha_j}}$ nem osztható p_j-vel.

Jelölje az $\binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n-1}$ számok legnagyobb közös osztóját m. A fentiekből látható, hogy ha n nem prímhatvány, akkor m a p_1, p_2, $\dots$, p_t prímek egyikével sem osztható. Így, mivel m osztója $\binom{n}{1} = n$-nek, m értéke 1.

Legyen ezután $n = p^\alpha$ prímhatvány; nyilván ekkor $m = p^\beta \le p^\alpha$ lehet csak. Az előbbi észrevételt $k = \alpha - 1$-re alkalmazva kapjuk, hogy $\beta < \alpha + 1 - (\alpha - 1) = 2$, azaz $\beta \le 1$. Másrészt tetszőleges $1 \le l \le p^\alpha - 1$ esetén $l = p^w \cdot l_1$, ahol l_1 nem osztható p-vel és $w \le \alpha - 1$. Így

$$\binom{n}{l} = \binom{p^\alpha}{l} = p \cdot p^{\alpha-1-w} \cdot \frac{\binom{p^\alpha-1}{l-1}}{l_1}.$$

mivel l_1 a p-hez relatív prím, a $\frac{\binom{p^\alpha-1}{l-1}}{l_1}$ hányados egész, ezért $\binom{n}{l}$ osztható p-vel. Tehát: $m = 1$, ha n nem prímhatvány, és $m = p$, ha n a p prímnek hatványa.

Megyeri Csaba (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn., IV. o.t.)