

A feladat megoldásához néhány segédtevélt bocsátunk előre.

I. Egy téglalapban elhelyezett bármely négyzet oldala legfeljebb akkora, mint a téglalap rövidebbik oldala.

Húzzunk párhuzamost a négyzet csúcsain keresztül a téglalap megfelelő oldalaival úgy, hogy azok ne messék a négyzet belsejét. A négy egyenes olyan négyzetet határoz meg, amely a kiindulási négyzetet tartalmazza, és oldalai párhuzamosak a téglalap oldalaival.

II. Egy derékszögű háromszögbe írt négyzetek közül az a legnagyobb, amelyiknek két oldala a befogókra illeszkedik, egy csúcsa pedig az átfogón van.

Legyen $KLMN$ egy, az ABC derékszögű háromszögben lévő négyzet. Mozgassuk el a négyzetet úgy, hogy pl. K az AC , L pedig a BC oldalon legyen, és az új négyzet is ABC -ben feküdjön (1. ábra). Mivel $CKOL$ húrnégyszög, $OCK\angle = OLK\angle = 45^\circ$, vagyis a négyzet O középpontja a derékszög felezőjére esik. Messe ez a szögfelező az MN oldalt D -ben. Elegendő megmutatni, hogy $\overline{CD} > \overline{KM}$. Látható, hogy C , K , D és M egy körön van, hiszen a KD szakasz C -ből is és M -ből is 45° -os szögben látszik. A C , K , D és M pontokon átmenő kör O' középpontja a CD és KM húrok felezőmerőlegesének metszéspontja, ezért $O'FO\angle = 90^\circ$, így $\overline{O'F} < \overline{O'O}$. A CD húr tehát közelebb van O' -höz, mint a KM , ezért valóban $\overline{CD} > \overline{KM}$.

III. Ha egy egységnyi oldalú négyzetben elhelyezkedik egy a és egy b oldalú, közös belső pont nélküli négyzet, akkor $a + b \leq 1$.

Legyen e olyan egyenes, amelynek a két négyzet különböző félsíkjaiban van (2. ábra). Ha e az egységnégyzet valamelyik oldalával párhuzamos, akkor (I) szerint készen vagyunk. Egyébként e metszi az egységnégyzet valamennyi oldalegyenesét. Jelölje C_1 és C_2 az egységnégyzet két azon átelleses csúcsát, amelyek egyike az e -től legtávolabb lévő csúcs. (II) szerint a C_1EF , illetve a C_2GH derékszögű háromszögben elhelyezhető legnagyobb négyzet egyik átlója a C_1C_2 szakaszon van, így a két átlónak közös belső pontja nem lévén, hosszuk összege legfeljebb $\overline{C_1C_2}$, azaz $\sqrt{2}(a + b) \leq \sqrt{2}$.

IV. Egy téglalapban lévő, közös belső pont nélküli két négyzet oldalának összege legfeljebb akkora, mint a téglalap hosszabbik oldala.

Az állítás közvetlenül adódik (III)-ból, ehhez a téglalapot olyan négyzetté egészítjük ki, amelynek oldala a téglalap hosszabbik oldalával egyenlő.

Nevezzük a továbbiakban az 1×2 -es téglalap felezőjének azt az egyenest, amely öt 2 darab egységnégyzetre bontja; e két négyzetet hívjuk majd a téglalap felének.

V. Ha az 1×2 -es téglalapban lévő valamely négyzetnek létezik közös (határ)pontja a téglalap egységnyi hosszúságú oldalával, akkor ez a négyzet a téglalapnak az egyik (a közös pontot tartalmazó) felében van.

Az (I) bizonyításában látott módon a szóban forgó négyzet olyan, a téglalapban fekvő négyzetbe foglalható, amelynek oldalai párhuzamosak a téglalap oldalaival, és egyik oldalegyenese a téglalap egyik egység hosszúságú oldalával közös. Nyilván ez a befoglaló négyzet a téglalap felében található.

A feladat kérdéseire térve megmutatjuk, hogy a válasz igenlő. Toljuk el a téglalapban lévő három négyzetből álló ponthalmazt a $\overrightarrow{BA}$ irányában úgy, hogy valamelyik négyzetnek legyen határpontja AD -n (3. ábra). Ha több ilyen négyzet is lenne, jelöljük ki az egyiket; nevezzük bal szélsőnek. A másik két négyzet közül válasszuk ki azt, amelyiket $\overrightarrow{AB}$ irányában eltolva nem metszi a másikat (ha mindkettő ilyen, tekintsük az egyiket); toljuk el ezt a négyzetet úgy, hogy egyik határpontja BC -re essék. Az így kapott négyzetet hívjuk jobb szélsőnek, az első eltolás során kapott harmadikat pedig középsőnek. A négyzetek származtatásából látható, hogy a bal szélsőnek és a középsőnek nincs közös belső pontja, akárcsak a jobb szélsőnek és a középsőnek. A két szélső pedig azért nem metszi egymást, mert (V) szerint a téglalap két különböző felében vannak. A továbbiakban elegendő csak a két szélső és a középső négyzettel foglalkozni az eredetiek helyett; mivel nem metszik egymást, a középső elválasztható a két szélsőtől az e és az f egyenesekkel. Mivel a két szélső négyzet a téglalap „bal”, illetve „jobb” felében fekszik, elérhető, hogy e -nek legyen közös pontja a téglalap bal felét alkotó zárt négyzetlemezzel, hasonlóan f -nek a zárt jobb féllel.

Ha e és f egyike párhuzamos AD -vel, akkor a bizonyítani kívánt egyenlőtlenség következik (IV)-ből; ha pedig az egyik egyenes AB -vel párhuzamos, akkor egy négyzet egy $n \times 2$ -es, kettő pedig egy $(1 - n) \times 2$ -es téglalapba kerül, ezért (I) szerint a négyzetoldalak összege legfeljebb $n + 2(1 - n) = 2 - n \leq 2$. Foglalkozzunk a továbbiakban azzal az esettel, amikor e és f a téglalap valamennyi oldalegyenesét metszve létrehoz két olyan derékszögű háromszöget, amelyekben egy-egy szélső négyzet helyezkedik el. Tekintsük például a 3. ábrán az A csúcsú, e által levágott derékszögű háromszöget. Mivel e -nek van közös pontja a téglalap bal felével, azért a DAB szög felezője a téglalapon metszi az e egyenest. Ez azt jelenti, hogy a derékszögű háromszögbe a (II) szerinti legnagyobb négyzetet beírva, az része marad a téglalapnak; helyettesítsük ővele a bal szélső négyzetet, és tegyünk ugyanígy a jobb szélső négyzettel is. Ezután két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az újonnan kapott szélső négyzetek a téglalap különböző vagy azonos oldalaira támaszkodnak-e (4. és 5. ábra). Az első esetben a középső négyzet c oldala legfeljebb akkora, mint az XZY derékszögű háromszög XZ befogója (4. ábra). Az XTY derékszögű háromszög XY átfogója az XZY háromszögével közös, így – mivel $ZXY\angle \leq TXY\angle - \overline{ZY} \geq \overline{TY}$, ezért

$$c \leq c' = \overline{XZ} \leq \overline{XT} = 2 - (a + b).$$

Utolsóként az 5. ábrán látható konfigurációval foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy az a és b oldalú négyzetekhez nem tudunk $2 - a - b$ vagy annál nagyobb oldalú négyzetet illeszteni úgy, hogy az ne nyúljon ki a téglalaphól. A 6. ábra

jelöléseivel elég azt megmutatni, hogy már a $c' = 2 - (a + b)$ oldalú négyzet is csak úgy helyezhető el ezen a módon, hogy H csúcsának AB -től való távolsága nagyobb, mint 1; feltehető, hogy $a, b < 1$.

Könnyen látható, hogy a c' oldalú négyzetbe berajzolt négy, egymással egybevágó derékszögű háromszög hasonló a PQS és a TRP derékszögű háromszögekhez; ezekben a két befogó arányát jelölje t , és használjuk az ábra többi jelölését is. A H pontnak az AB -től való távolsága:

$$\begin{aligned} d &= c' \cdot \frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}} + \left(a - \frac{y}{t}\right) = \\ &= c' \frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}} + (b - tx). \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy $a - \frac{y}{t} = b - tx$ (a P pont távolsága AB -től) és

$$x + y = c' = 2 - (a + b),$$

kapjuk, hogy

$$x = \frac{t(b-a) + c'}{1+t^2},$$

ezért

$$\begin{aligned} d-1 &= \left(\frac{t^2+t}{1+t^2} - \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right)a + \left(\frac{1+t}{1+t^2} - \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right)b + 2\left(\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{1+t^2}\right) - 1 = \\ &= (t+1) \left[\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)a + \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)b + 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}\right) - \frac{t-1}{1+t^2} \right] = \\ &= (t+1) \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}\right)(2-a-b) - \frac{t-1}{1+t^2}(1-a) \right] = \\ &= \frac{t+1}{1+t^2} \left[(\sqrt{1+t^2}-1)(2-a-b) - (t-1)(1-a) \right] > 0, \end{aligned}$$

hiszen $\sqrt{1+t^2}-1 > 0$, $\sqrt{1+t^2}-1 > t-1$ és $2-a-b > 1-a$.

Gyenes Zoltán (Budapest, Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn., III. o.t.) és Juhász András (Fazekas M. Főv. Gyak.

Gimn., II. o.t.) dolgozatainak felhasználásával

Megjegyzések. 1. A feladat rokonságot mutat az 1974. évi Kürschák József matematika verseny 2. feladatával, amely megtalálható Surányi János: *Matematikai versenytételek* III. rész c. művében.

2. Ha a téglalap $1 \times d$ méretű és $d < 2$, akkor $a + b + c \leq d$ nem igaz.

3. Megyeri Csaba (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., IV. o.t.) rámutat a feladat és Erdős Pál megoldatlan feladata közötti kapcsolatra: Ha a feladat állítása nem lenne igaz, akkor Erdős professzor úr megoldatlan problémája sem lenne igaz. Osszuk fel ugyanis az egységnégyzetet n^2 darab $\frac{1}{n}$ oldalú négyzetre. Két egymás mellettibe elhelyezzük azt a három négyzetet, amelyre $a + b + c > \frac{2}{n}$, a többi négyzetet meghagyjuk. Így összesen $n^2 + 1$ négyzetet helyeztünk el, az oldalhosszak összege:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n^2+1} = a + b + c + (n^2 - 2) \cdot \frac{1}{n} > \frac{2}{n} + (n^2 - 2) \cdot \frac{1}{n} = n.$$



