A válasz: a konstans polinomokra. A feltétel szerint ugyanis

$$P(X,\ Y)=P(X+Y,\ X-Y)=P\Big((X+Y)+(X-Y),\ (X+Y)-(X-Y)\Big)=P(2X,\ 2Y).$$

Rögzített t valós paraméterrel legyen $P_t(x)=P(x,\ tx)$, ekkor

$$P_t(2x)=P(2x,\ 2tx)=P(x,\ tx)=P_t(x)$$

szerint $P_t(2^kx)=P_t(x)$ minden $k\geq 1$ egészre. Legyen például $P_t(1)=c$, ekkor minden ilyen k-ra $P_t(2^k)-c=0$, azaz $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots$ mindegyike gyöke a $P_t(x)-c$ polinomnak. Egy polinomnak azonban csak akkor lehet végtelen sok gyöke, ha a konstans nulla polinom, azaz ha $P_t(x)$ konstans polinom minden t valós paraméterre. Hasonlóan kaphatjuk, hogy $Q_t(x)=P(tx,\ x)$ is konstans minden t-re. Így tetszőleges x, y valós számokra $y=tx$ vagy $x=ty$ (alkalmas t-vel), tehát

$$P(x,\ y)=P_t(x)=P_t(0)=P(0,\ 0)\quad \text{vagy}\quad P(x,\ y)=Q_t(y)=Q_t(0)=P(0,\ 0),$$

azaz P konstans polinom.

Megjegyzés. 1. A közölt megoldás tényként kezeli, hogy ha egy valós változós polinom minden helyettesítési értéke ugyanaz, akkor a polinom konstans, azaz minden valódi x-hatvány együtthatója 0. Ez az egyváltozós esetben abból következik, hogy egy nem konstans egyváltozós polinomnak csak véges sok gyöke lehet. Ezután már belátható a megfelelő állítás kétváltozós polinomokra is, felhasználva, hogy minden ilyen $f(x,\ y)$ polinom felírható

$$f_k(y)x^k+f_{k-1}(y)x^{k-1}+\cdots+f_1(y)x+f_0(y)$$

alakban, ahol $f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_k$ egyváltozós polinomjai y-nak. (Ugyanis rögzítve y-t, kapjuk, hogy

$$f_k(y)=f_{k-1}(y)=\cdots=f_1(y)=0,$$

és mivel ez minden y-ra igaz, $f_{k-1},\ \ldots,\ f_1$ mindegyike azonosan nulla; így ha $f(x,\ y)$ minden helyettesítési értéke ugyanaz, akkor $f(x,\ y)=f_0(y)$ alakú, és használjuk az egyváltozós polinomokra már belátott állítást.)

2. Az ismertetett megoldás kiindulópontjául szolgált $P(X,\ Y)=P(2X,\ 2Y)$ azonosságot a $P(X,\ Y)=P\left(\dfrac{X}{2},\ \dfrac{Y}{2}\right)$, ill. az ebből adódó $P\left(\dfrac{X}{2^k},\ \dfrac{Y}{2^k}\right)=P(X,\ Y)$ alakban használva kapjuk, hogy minden x, y számpárra (a kétváltozós $P(x,\ y)$ függvény folytonossága miatt) $P(X,\ Y)=\lim\limits_{k\to\infty}P\left(\dfrac{X}{2^k},\ \dfrac{Y}{2^k}\right)$, ami viszont éppen a $P(X,\ Y)$ kifejezés konstans tagja, hiszen a $P(X,\ Y)=\sum a_{ij}X^iY^j$ alakban mindegyik $a_{ij}\left(\dfrac{X}{2^k}\right)^i\left(\dfrac{Y}{2^k}\right)^j$ tag értéke 0-hoz tart, ha $k\to\infty$ és $i+j>0$.

Lippner Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

3. Azok, akik minden bizonyítás vagy hivatkozás nélkül használták a kétváltozós polinomokra, hogy csak véges sok gyökük lehet, illetve hogy folytonosak, nem kaptak maximális pontszámot.