

Először megmutatjuk, hogy ha n pozitív egész, akkor $\cos n\alpha$ megadható $\cos \alpha$ n -edfokú, egész együtthatós polinom-jaként, amelynek főegyütthatója 2^n . Pontosabban az alábbi, ezt tartalmazó állítást fogjuk belátni teljes indukcióval.

Ha n pozitív egész, akkor $\cos(n\alpha) = f_n(\cos \alpha)$, és $\sin(n\alpha) = \sin \alpha g_n(\cos \alpha)$, ahol $f_n(x)$ n -edfokú, $g_n(x)$ pedig $(n-1)$ -edfokú egész együtthatós polinom, amelynek főegyütthatója 2^n .

$n = 1$ -re az $f_1(x) = x$ és $g_1(x) = 1$ választással igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n = (k-1)$ -re igaz, ebből bizonyítjuk az állítást $n = k$ -ra:

$$\begin{aligned}\cos(k\alpha) &= \cos \alpha \cos((k-1)\alpha) - \sin \alpha \sin((k-1)\alpha) = \\ &= \cos \alpha f_{k-1}(\cos \alpha) - \sin^2 \alpha g_{k-1}(\cos \alpha) = \\ &= \cos \alpha f_{k-1}(\cos \alpha) + \cos^2 \alpha g_{k-1}(\cos \alpha) - g_{k-1}(\cos \alpha).\end{aligned}$$

Ez $\cos \alpha$ -nak nyilván n -edfokú polinomja, mert $\cos \alpha f_{k-1}(\cos \alpha)$ és $\cos^2 \alpha g_{k-1}(\cos \alpha)$ is az, $g_{k-1}(\cos \alpha)$ foka pedig kisebb, mint n . A polinom főegyütthatója az indukciós feltevés felhasználásával $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$. A fenti rekurzióból az is látszik, hogy $f_k(x)$ egész együtthatós.

A $\sin(n\alpha)$ -ra vonatkozó állítás másik fele hasonlóan igazolható:

$$\begin{aligned}\sin(k\alpha) &= \cos((k-1)\alpha) \sin \alpha + \cos \alpha \sin((k-1)\alpha) = \\ &= \sin \alpha (f_{k-1}(\cos \alpha) + \cos \alpha g_{k-1}(\cos \alpha)).\end{aligned}$$

A zárójelben lévő összeg $(n-1)$ -edfokú egész együtthatós polinom, amelynek főegyütthatója $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$.

A most belátott egyenlőségek segítségével (1) így is írható:

$$f_{n_1}\left(\frac{1}{p_1}\right) + f_{n_2}\left(\frac{1}{p_2}\right) + \cdots + f_{n_{k-1}}\left(\frac{1}{p_{k-1}}\right) = f_{n_k}\left(\frac{1}{p_k}\right).$$

Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ -nal. Az így kapott egyenlet mindkét oldalán egészekből álló összeg szerepel. Mindkét összeg minden tagja osztható p_1 -gyel, kivéve az $f_{n_1}\left(\frac{1}{p_1}\right)$ polinom n_1 -edfokú tagjának $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ -szerezését, ami $2^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ az előzőek szerint. Így az egyenlet egyik oldala osztható p_1 -gyel, a másik nem.

Nincs tehát a feladatnak megfelelő $n_1, n_2, \dots, n_k$ szám k -as.