

A tetszőleges $x_i < 1$ -re fennálló

$$\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} = \frac{1-(1-x_i)}{\sqrt{1-x_i}} = \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} - \sqrt{1-x_i}$$

azonosság alkalmazásával a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala:

$$\begin{aligned} B &= \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1-x_n}} \right) - (\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_n}). \end{aligned}$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1-x_n}} \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{1-x_1} \cdot \sqrt{1-x_2} \cdot \dots \cdot \sqrt{1-x_n}}},$$

a számtani és négyzetes közepekre fennálló egyenlőtlenségből pedig:

$$\begin{aligned} & -(\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_n}) \geq \\ & \geq -n \sqrt{\frac{(1-x_1) + (1-x_2) + \dots + (1-x_n)}{n}} = -n \sqrt{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} B &\geq n \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{(1-x_1)(1-x_2) \dots (1-x_n)}}} - n \sqrt{\frac{n-1}{n}} \geq \\ &\geq n \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{(1-x_1) + (1-x_2) + \dots + (1-x_n)}{n}\right)^n}}} - n \sqrt{\frac{n-1}{n}} = n \sqrt{\frac{n}{n-1}} - n \sqrt{\frac{n-1}{n}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}. \end{aligned}$$

A jobb oldalt, J -t a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséggel becslve:

$$\frac{\sqrt{n-1}}{n} J = \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ezért $J \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$, tehát

$$B \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geq J.$$

Egyenlőség – a felhasznált egyenlőtlenségek miatt – pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$.

Szűcs Gábor (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o.t.)