

**I. megoldás** A karika adott pontjának pályagörbáját nyilván nem befolyásolja az, hogy a karika gyorsul-e vagy nem. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a karika egyenletes  $v$  sebességgel gördül le a lejtőn.

Az  $A$  pont a pálya legmagasabb pontja, ezért itt kérdéses (éppen itt levő) tömegpontnak nem lehet függőlegesen felfelé mutató sebesség-komponense. (Ha nem így lenne, akkor egy kicsivel később még magasabbra kerülne). Hasonló okokból lefelé mutató sem lehet a függőleges sebesség-összetevője. A karika kérdéses darabkájának sebesség tehát vízszintes kell legyen az  $A$  pontban.

A karika bármely pontjának sebessége a karika középpontjának  $v$  nagyságú, a vízszinteshez képest  $\alpha$  szögben lefelé irányuló sebességéből, valamint a középpont körüli forgómozgás ugyancsak  $v$  nagyságú kerületi sebességéből tevődik össze. A két sebesség vektori összege akkor lesz vízszintes, ha a kerületi sebesség vektora a vízszintessel ugyancsak  $\alpha$  szöget zár be (emelkedő irányban). Az eredő sebesség nagysága ezek szerint

$$v_A = 2v \cos \alpha.$$

A vizsgált pont gyorsulása a karikával együtt mozgó vonatkoztatási rendszerből nézve forgómozgás centripetális gyorsulása, tehát

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Ez a gyorsulásvektor a karika középpontja felé mutat, tehát a függőlegessel  $\alpha$  szöget zár be.

A gyorsulás a lejtőhöz rögzített (álló) koordináta-rendszerből nézve ugyanakkora, mint az egyenletesen mozgó rendszerben. Az álló rendszerben a vizsgált pont gyorsulása két összetevőre bontható. A sebességre merőleges (tehát függőleges) komponens a pálya  $R$  görbületi sugarával így fejezhető ki:

$$a_f = \frac{v_A^2}{R}.$$

Másrészt viszont ugyanez a mennyiség a gyorsulás nagyságának és irányának ismeretében

$$a_f = a \cos \alpha = \frac{v^2}{r} \cos \alpha$$

módon is megadható. A kétféle kifejezés összevetéséből ( $v_A$  korábban kiszámított értékének felhasználásával) a pálya görbületi sugarára

$$R = 4r \cos \alpha$$

adódik.

*Patay Gergely* (Debrecen, Tóth Á. Gimn., 12. o.t.)

*Megjegyzés.* A karika vizsgált pontja ciklois alakú görbén mozog. A karikának a lejtővel éppen érintkező  $O$  pontja nem mozog (sebessége nulla), tehát ezen a ponton halad át a karika pillanatnyi forgástengelye. Ennek ellenére nem mondhatjuk, hogy a pályagörbe görbületi sugara az  $A$  pontban az  $AO$  szakasz hosszával (tehát  $2r \cos \alpha$ -val) egyenlő, hanem – mint az a fenti megoldásból kiderült – annak éppen a kétszerese. A meglepőnek tűnő eltérés onnan származik, hogy a karika és a lejtő érintkezési pontja nem rögzített pont, hanem a karika elfordulása közben maga is elmozdul.

Jól szemlélteti a pillanatnyi forgástengelyre hivatkozó (hibás) érvelés tarthatatlanságát a következő példa: Egy kerékpár valamelyik kerekének tengelye is mindig a keréknek a talajjal érintkező pontja körül fordul el, mégsem állíthatjuk, hogy a tengely által leírt pályagörbe (ami egyenes) a kerék sugarával egyenlő görbületi sugárral rendelkezne!

**II. megoldás.** A cikloisnak, mint egy egyenesen gördülő kör egy pontja által leírt görbének az  $A$  pontbeli érintője vízszintes. A karika ebben a helyzetben az  $O$  pont körül fordul el, az  $AO$  szakasz tehát függőleges kell legyen.

Rajzoljuk fel a karika *kicsit korábbi* helyzetét is, amikor a lejtővel még az  $O_1$  pontban érintkezett, és jelöljük az  $OO_1$  távolságot  $s$ -sel ( $s \ll r$ ). Ha a karikát elfordulás nélkül eltolnánk a lejtőn felfelé  $s$  távolsággal, akkor az  $A$  pont  $A_1$ -be kerülne ( $AA_1 = s$ ). Ebben a korábbi helyzetben a cikloist leíró pont (a tiszta gördülés feltétele miatt) nem  $A_1$ -ben, hanem attól (a kör mentén ívesen mérve)  $s$  távolságban levő az  $A_2$  pontban helyezkedik el. A kicsiny íveket egyenes szakaszokkal közelítve megállapíthatjuk, hogy az  $AA_1A_2$   $\triangle$  egyenlőszárú, melynek  $s$  hosszú szárai  $\alpha$  szöget zárnak be a vízszintes  $AA_2$  oldallal.

A cikloist leíró pont  $A_2$ -beli sebessége merőleges az  $A_2O_1$  egyenesre (hiszen  $O_1$  pillanatnyi sebessége nulla), az  $A$ -beli sebesség pedig  $AO$ -ra merőleges. Ha a ciklois az  $A$  pont kis környezetében jól közelíthető egy alkalmasan választott körrel (a simulókörrrel), akkor annak  $C$  középpontja nem lehet máshol, mint az  $AO$  egyenes és az  $A_2O_1$  egyenes metszéspontjában.

Húzzunk az  $O$  pontból egy vízszintes egyenest, és jelöljük ezen egyenes és az  $A_2O_1$  egyenes metszéspontját  $O_2$ -vel. A  $COO_2$  és a  $CAA_2$  háromszögek hasonlóságából

$$\frac{OC}{AC} = \frac{OO_2}{AA_2}$$

következik, ami  $OO_2 \approx s \cos \alpha$ ,  $AA_2 \approx 2s \cos \alpha$  és  $AO = 2r \cos \alpha$  felhasználásával meghatározza a keresett  $R = AC$  görbületi sugarat:

$$\frac{R - 2r \cos \alpha}{R} = \frac{s \cos \alpha}{2s \cos \alpha} = \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad R = 4r \cos \alpha.$$

