I. megoldás A karika adott pontjának pályagörbéjét nyilván nem befolyásolja az, hogy a karika gyorsul-e vagy nem. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a karika egyenletes v sebességgel gördül le a lejtőn.

Az A pont a pálya legmagasabb pontja, ezért itt kérdéses (éppen itt levő) tömegpontnak nem lehet függőlegesen felfele mutató sebesség-komponense. (Ha nem így lenne, akkor egy kicsivel később még magasabbra kerülne). Hasonló okokból lefelé mutató sem lehet a függőleges sebesség-összetevője. A karika kérdéses darabkájának sebesség tehát vízszintes kell legyen az A pontban.

A karika bármely pontjának sebessége a karika középpontjának v nagyságú, a vízszinteshez képest α szögben lefelé irányuló sebességéből, valamint a középpont körüli forgómozgás ugyancsak v nagyságú kerületi sebességéből tevődik össze. A két sebesség vektori összege akkor lesz vízszintes, ha a kerületi sebesség vektora a vízszintessel ugyancsak α szöget zár be (emelkedő irányban). Az eredő sebesség nagysága ezek szerint

$$v_A = 2v\cos\alpha.$$

A vizsgált pont gyorsulása a karikával együtt mozgó vonatkoztatási rendszerből nézve forgómozgás centripetális gyorsulása, tehát

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Ez a gyorsulásvektor a karika középpontja felé mutat, tehát a függőlegessel α szöget zár be.

A gyorsulás a lejtőhöz rögzített (álló) koordináta-rendszerből nézve ugyanakkora, mint az egyenletesen mozgó rendszerben. Az álló rendszerben a vizsgált pont gyorsulása két összetevőre bontható. A sebességre merőleges (tehát függőleges) komponens a pálya R görbületi sugarával így fejezhető ki:

$$a_f = \frac{v_A^2}{R}.$$

Másrészt viszont ugyanez a mennyiség a gyorsulás nagyságának és irányának ismeretében

$$a_f = a\cos\alpha = \frac{v^2}{r}\cos\alpha$$

módon is megadható. A kétféle kifejezés összevetéséből (v_A korábban kiszámított értékének felhasználásával) a pálya görbületi sugarára

$$R = 4r\cos\alpha$$

adódik.

Patay Gergely (Debrecen, Tóth Á. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzés. A karika vizsgált pontja ciklois alakú görbén mozog. A karikának a lejtővel éppen érintkező O pontja nem mozog (sebessége nulla), tehát ezen a ponton halad át a karika pillanatnyi forgástengelye. Ennek ellenére nem mondhatjuk, hogy a pályagörbe görbületi sugara az A pontban az AO szakasz hosszával (tehát $2r\cos\alpha$-val) egyenlő, hanem – mint az a fenti megoldásból kiderült – annak éppen a kétszerese. A meglepőnek tűnő eltérés onnan származik, hogy a karika és a lejtő érintkezési pontja nem rögzített pont, hanem a karika elfordulása közben maga is elmozdul.

Jól szemlélteti a pillanatnyi forgástengelyre hivatkozó (hibás) érvelés tarthatatlanságát a következő példa: Egy kerékpár valamelyik kerekének tengelye is mindig a keréknek a talajjal érintkező pontja körül fordul el, mégsem állíthatjuk, hogy a tengely által leírt pályagörbe (ami egyenes) a kerék sugarával egyenlő görbületi sugárral rendelkezne!

II. megoldás. A cikloisnak, mint egy egyenesen gördülő kör egy pontja által leírt görbének az A pontbeli érintője vízszintes. A karika ebben a helyzetben az O pont körül fordul el, az AO szakasz tehát függőleges kell legyen.

Rajzoljuk fel a karika *kicsit korábbi* helyzetét is, amikor a lejtővel még az O_1 pontban érintkezett, és jelöljük az OO_1 távolságot s-sel ($s \ll r$). Ha a karikát elfordulás nélkül eltolnánk a lejtőn felfelé s távolsággal, akkor az A pont A_1-be kerülne ($AA_1 = s$). Ebben a korábbi helyzetben a cikloist leíró pont (a tiszta gördülés feltétele miatt) nem A_1-ben, hanem attól (a kör mentén ívesen mérve) s távolságban levő az A_2 pontban helyezkedik el. A kicsiny íveket egyenes szakaszokkal közelítve megállapíthatjuk, hogy az AA_1A_2 $\triangle$ egyenlőszárú, melynek s hosszú szárai α szöget zárnak be a vízszintes AA_2 oldallal.

A cikloist leíró pont A_2-beli sebessége merőleges az A_2O_1 egyenesre (hiszen O_1 pillanatnyi sebessége nulla), az A-beli sebesség pedig AO-ra merőleges. Ha a ciklois az A pont kis környezetében jól közelíthető egy alkalmasan választott körrel (a simulókörrel), akkor annak C középpontja nem lehet máshol, mint az AO egyenes és az A_2O_1 egyenes metszéspontjában.

Húzzunk az O pontból egy vízszintes egyenest, és jelöljük ezen egyenes és az A_2O_1 egyenes metszéspontját O_2-vel. A COO_2 és a CAA_2 háromszögek hasonlóságából

$$\frac{OC}{AC} = \frac{OO_2}{AA_2}$$

következik, ami $OO_2 \approx s\cos\alpha$, $AA_2 \approx 2s\cos\alpha$ és $AO = 2r\cos\alpha$ felhasználásával meghatározza a keresett $R = AC$ görbületi sugarat:

$$\frac{R - 2r\cos\alpha}{R} = \frac{s\cos\alpha}{2s\cos\alpha} = \frac{1}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad R = 4r\cos\alpha.$$

Belkovits Katalin (Marosvásárhely, Bolyai Farkas Elm. Líceum, 11. o.t.) dolgozata alapján