

Az abroncsra az 1. ábrán látható erők hatnak. Mivel a lejtőre merőleges irányban nem gyorsul a test,

$$(1) \quad N = mg \cos \alpha,$$

a súrlódási erő pedig (mindaddig, amíg csúszik az abroncs)

$$(2) \quad S = \mu N = \mu mg \cos \alpha.$$

A lejtő irányú mozgásegyenletből következik, hogy az abroncs tömegközéppontjának gyorsulása

$$(3) \quad a = g(\sin \alpha - \mu g \cos \alpha).$$

A súrlódási együttható megadott helyfüggését is figyelembe véve és bevezetve az

$$(4) \quad \omega_0 = \sqrt{\gamma g \cos \alpha} \quad \text{és} \quad x_0 = \frac{\tan \alpha}{\gamma}$$

jelöléseket a (3) mozgásegyenlet

$$(5) \quad a = -\omega_0^2 (x - x_0)$$

alakba is írható. Ez az egyenlet megegyezik egy ω_0 körfrekvenciájú, x_0 egyensúlyi helyzetű harmonikus rezgőmozgásával. Ezt az analógiát kihasználva felírhatjuk az abroncs tömegközéppontjának $x(t)$ elmozdulását is. Az $x(0) = 0$ és $v(0) = 0$ kezdeti feltételeket figyelembe véve a megoldás:

$$(6) \quad x(t) = x_0 (1 - \cos \omega_0 t),$$

az abroncs tömegközéppontjának pillanatnyi sebessége pedig

$$(7) \quad v(t) = x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

A elmozdulás ismeretében kiszámíthatjuk a pillanatról pillanatra változó súrlódási együtthatót, abból a súrlódási erőt:

$$(8) \quad S(t) = \mu mg \cos \alpha = x(t) \cdot \gamma mg \cos \alpha,$$

majd ennek forgatónyomatékaiból az abroncs β szöggyorsulását:

$$(9) \quad \beta = \frac{rS}{mr^2} = \frac{\gamma x_0 g \cos \alpha}{r} (1 - \cos \omega_0 t).$$

(Kihasználtuk, hogy egy m tömegű, r sugarú vékony abroncs tehetetlenségi nyomatéka mr^2 .)

A (9) képlet azt mutatja, hogy a szöggyorsulás egy időben állandó és egy időben periodikusan ($\cos \omega_0 t$ -vel arányosan) változó tag összege. Ennek megfelelően az abroncs szögsebessége (annak kezdeti nulla értékét is figyelembe véve)¹ Az abroncs pillanatról pillanatra változó $\omega(t)$ szögsebessége nem tévesztendő össze a tömegközéppont mozgásképletében szereplő ω_0 körfrekvenciával, ami egy állandó érték:

$$(10) \quad \omega(t) = \frac{\gamma x_0 g}{r} \cos \alpha \left(t - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right).$$

Az abroncs addig csúszik, míg a tömegközéppont $v(t)$ sebessége nagyobb, mint a forgómozgásból származó $v_{\text{ker}}(t) = r\omega(t)$ kerületi sebesség. A tiszta gördülés kezdetére (7) és (10) szerint

$$(11) \quad x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t = \gamma x_0 g \cos \alpha \left(t - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \right)$$

jellemző, amit (4) felhasználásával és a az $\xi = \omega_0 t$ új változó bevezetésével

$$(12) \quad \xi = 2 \sin \xi$$

alakra hozhatunk. (12) megoldása grafikusan (2. ábra), vagy egy zsebszámológéppel numerikusan kereshető meg, és $\xi \approx 1,8955$ -nek adódik.

Az abroncs tehát az indításától számított

$$(13) \quad t \approx \frac{1,90}{\omega_0} = \frac{1,90}{\sqrt{\gamma g \cos \alpha}}$$

idő múlva kezd el csúszásmentesen gördülni.

A mozgás további részében (egészen a lejtő aljáig) az abroncs sebessége és a szögsebessége ($\frac{1}{2}g \sin \alpha$ gyorsulással, illetve $\frac{g}{2r} \sin \alpha$ szöggyorsulással) időben egyenletesen növekszik.

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn., 10. o.t.) és *Katona Gergely* (Budapest, ELTE Trefort Á. Gyakorlóisk., 12. o.t.) dolgozata alapján

