

I. megoldás. A rendszerre nem hatnak vízszintes irányban külső erők, emiatt a tömegközéppont kezdeti $v_0/2$ vízszintes sebessége időben változatlan marad. Üljünk bele a tömegközépponttal együtt vízszintes irányban egyenletesen mozgó koordináta-rendszerbe. Jelöljük a kis test vízszintes elmozdulását x -szel, ekkor az abroncs középpontja ellenkező irányban ugyanennyivel kell elmozduljon, hiszen az egész rendszer tömegközéppontja vízszintes irányban mozdulatlan.

A kis testre az (1. ábrán) látható erők hatnak. Ha v_0 kicsi, akkor a kis test csak kicsit mozdulhat ki vízszintes irányban, a függőleges elmozdulása (és ezzel együtt a függőleges irányú gyorsulása) tehát másodrendűen kicsiny, elhanyagolható. Emiatt a K kényszererő az mg nehézségi erővel egyezik meg, vízszintes komponense pedig

$$K_x = -K \sin \varphi \approx mg \frac{2x}{r}.$$

Newton második törvénye szerint

$$ma = -\frac{2mg}{r}x,$$

amelyben felismerhetjük az $\omega = \sqrt{2g/r}$ körfrekvenciájú harmonikus rezgések mozgásegyenletét. A kis test kezdeti sebessége (a tömegközépponti rendszerben) $v_0/2$, a kitérés időbeli alakulását tehát az

$$x(t) = \frac{v_0}{2\omega} \sin \omega t$$

függvény írja le.

Visszatérve az eredeti (az asztallaphoz rögzített) koordináta-rendszerbe, az abroncs középpontjának elmozdulása

$$X(t) = \frac{v_0 t}{2} - \frac{v_0}{2\omega} \sin \omega t,$$

a sebessége pedig

$$V(t) = \frac{v_0}{2} (1 - \cos \omega t).$$

II. megoldás. Jelöljük az abroncs tömegközéppontjának t pillanatbeli elmozdulását $X(t)$ -vel, pillanatnyi sebességét pedig $V(t)$ -vel; a kis test és az abroncs középpontját összekötő egyenes függőlegessel bezárt szögét pedig φ -vel (2. ábra). Ez a két (pillanatról pillanatra változó) adat leírja a rendszer mozgását, feladatunk tehát ezen függvények meghatározása.

Jelöljük az egyes mennyiségek idő szerinti változási sebességét (egységnyi idő alatti változást) a kérdéses mennyiség betűjele fölé írt „ponttal”. Ezzel a jelöléssel az abroncs pillanatnyi (vízszintes) sebessége $\dot{X}(t)$, a kis testnek a karikához viszonyított szögsebessége $\dot{\varphi}$, érintő irányú kerületi sebessége tehát $r\dot{\varphi}$.

Az abroncsra (súrlódásmentes körülmények között) nem hat forgatónyomaték, ezért nem jön forgásba. A rendszerre vízszintes irányban nem hat külső erő, emiatt a teljes vízszintes irányú impulzus időben állandó marad.

$$(1) \quad m\dot{X} + m(\dot{X} + r\dot{\varphi} \cos \varphi) = I = \text{állandó}.$$

Ugyancsak változatlan marad a rendszer teljes mechanikai energiája:

$$(2) \quad \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{X}r\dot{\varphi} \cos \varphi) + mgr(1 - \cos \varphi) = E = \text{állandó}.$$

Kezdetben $\dot{X}(t=0) = 0$ és $\dot{\varphi}(t=0) = v_0/r$, innen a két mozgásállandó: $I = mv_0$, illetve $E = \frac{1}{2}mv_0^2$. Ezek felhasználásával írhatjuk

$$(3) \quad 2\dot{X} + r\dot{\varphi} \cos \varphi = v_0,$$

valamint

$$(4) \quad 2\dot{X}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{X}r\dot{\varphi} \cos \varphi + 2rg(1 - \cos \varphi) = v_0^2.$$

Fejezzük ki (3)-ból $\dot{X}(t)$ -t és helyettesítsük (4)-be:

$$(5) \quad \dot{X} = \frac{v_0 - r\dot{\varphi} \cos \varphi}{2},$$

$$(6) \quad r^2\dot{\varphi}^2(2 - \cos \varphi) + 4rg(1 - \cos \varphi) = v_0^2.$$

Használjuk ki továbbá, hogy v_0 kicsiny ($v_0 \ll \sqrt{gr}$), így $1 - \cos \varphi \ll 1$, tehát

$$1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi^2}{2}.$$

Ebben a közelítésben (6) így alakul:

$$(7) \quad \dot{\varphi}^2 + \frac{2g}{r}\varphi^2 = \left(\frac{v_0}{r}\right)^2.$$

Ez az összefüggés megegyezik egy $\omega = \sqrt{2g/r}$ körfrekvenciájú, $A = v_0/(\omega r)$ maximális (szög)kitérésű harmonikus rezgőmozgás képletével, hiszen a

$$(8) \quad \varphi(t) = A \sin \omega t, \quad \dot{\varphi}(t) = A\omega \cos \omega t$$

függvények nyilván kielégítik (7) egyenletet, továbbá a $\varphi(0) = 0$ és $\dot{\varphi}(0) = v_0/r$ kezdeti feltételeket is.

Az $X(t)$ függvény (5) és (8) felhasználásával számítható ki.

$$\dot{X}(t) = \frac{v_0}{2} (1 - \cos \omega t),$$

ahonnan az egyenletes mozgás és a harmonikus rezgőmozgás ismert út-sebesség képleteinek mintájára ($X(0) = 0$ kezdeti feltételt is figyelembe véve) a végeredmény:

$$X(t) = \frac{v_0 t}{2} - \frac{v_0}{2\omega} \sin \omega t.$$

G. P.

