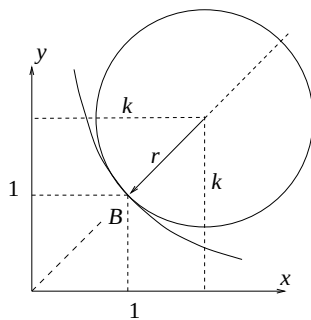


**I. megoldás.** A helyzeti energia megváltozásából ki tudjuk számítani a test  $B$  pontbeli sebességét:

$$v = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 1} \text{ m/s} = 4,4 \text{ m/s}.$$



1. ábra

A nyomóerőt a lejtőre merőleges irányú mozgásegyenletből számíthatjuk ki:

$$K = mg \sin 45^\circ + \frac{mv^2}{R},$$

ehhez azonban ismernünk kellene a pályagörbe  $R$  görbületi sugarát (a pályagörbét a kérdéses  $B$  pontban legjobban közelítő kör sugarát).

Mivel az  $y = 1/x$  egyenletű hiperbola szimmetrikus az  $y = x$  egyenesre, ezért a simulókör középpontja rajta lesz ezen az egyenesen, koordinátáit tehát kereshetjük  $(k, k)$  alakban. Az 1. ábráról leolvasható, hogy a kör sugara  $r = \sqrt{2}(k - 1)$ , az egyenlete tehát:

$$(x - k)^2 + (y - k)^2 = 2(k - 1)^2.$$

Ezen egyenlet által leírt körnek és az  $y = 1/x$  egyenletű hiperbolának a metszéspontjait az

$$(x - k)^2 + \left(\frac{1}{x} - k\right)^2 = 2(k - 1)^2$$

egyenlet gyökei adják meg, amely algebrai átalakítások után így is felírható:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2k\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4(k - 1) = 0.$$

Ez az egyenlet az  $u = x + x^{-1}$  új változóra nézve másodfokú, és az  $x = y = 1$  azaz  $u = 2$  nyilvánvaló megoldáson kívül akkor nincs több megoldása, ha a  $D = 4k^2 + 4(4k - 1)$  diszkrimináns negatív vagy nulla: A simulókörnek éppen a  $D = 0$  határeset felel meg, ez pedig  $k = 2$ -nél teljesül.

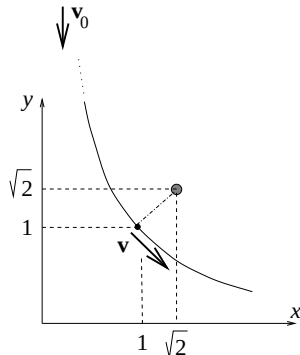
A simulókör sugara tehát  $R = \sqrt{2}$  m, a kérdéses nyomóerő pedig

$$K = mg \sin 45^\circ + \frac{mv^2}{R} = mg \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right) \approx 2,1 \text{ N}.$$

Hegyi Péter (Budapest, Szent István Gimn., 12. o.t.) és Terpai Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

dolgozata alapján

**II. megoldás.** A pálya görbületi sugarát fizikai megfontolások segítségével is meghatározhatjuk. Ha egy pontszerű test valamilyen (ismert alakú) erő hatására éppen hiperbola pályán mozog, akkor Newton II. törvényét felhasználva kiszámíthatjuk a test centripetális gyorsulását, majd abból a pálya görbületi sugarát. (Ez a mennyiség nyilván csak a pályagörbétől függ, nem pedig attól, hogy milyen módon halad végig a kérdéses pályán a vizsgált test.)



## 2. ábra

Kepler I. törvénye szerint az égitestek a Nap gravitációs erőterében kúpszelet alakú pályákon mozognak, és ha a sebességük elegendően nagy, akkor a pályájuk hiperbola. Használjuk ki, hogy az  $y = 1/x$  egyenletű hiperbola egyik fókuszpontja a  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  pontban van. Képzeljük el, hogy ebben a fókuszpontban van a Nap, és a pozitív  $y$  tengely irányából alkalmasan választott  $v_0$  sebességgel közeledik hozzá egy  $m$  tömegű kicsiny test (2. ábra). A perdületmegmaradás tétele szerint a Naphoz legközelebbi  $B$  pontban  $v$  sebességgel haladó testre fennáll

$$mv_0 \sqrt{2} = mv(2 - \sqrt{2}),$$

az energiamegmaradás törvényéből pedig

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - f \frac{mM}{2 - \sqrt{2}}$$

következik. Ezekből az összefüggésekből

$$v^2 = \sqrt{2} \frac{fM}{(2 - \sqrt{2})^2}$$

adódik, melyet az

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{fmM}{(2 - \sqrt{2})^2}$$

mozgásegyenletbe helyettesítve a  $B$  pontbeli görbületi sugárra  $R = \sqrt{2}$  m-t kapunk.

A számítás további menete megegyezik az I. megoldásban leírtakkal.

Tóth Bálint (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

*Megjegyzés.* A görbületi sugár differenciálszámítás segítségével is meghatározható:

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{2 \cdot x^{-3}}{(1 + [-x^{-2}]^2)^{3/2}} = \frac{2}{2^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$