

Tételezzük fel, hogy a gömb átlátszó (tehát a felületének bármely pontjából eljuthat a fény a lencséhez), de a belsejének törésmutatója nem különbözik a levegőétől, így a fénysugarak csak a lencsénél törnek meg. (A gyakorlatban ilyen helyzet például egy gömbfelület alakú, vékony, de nem nagyon sűrű szövésű dróthálójával valósítható meg.)

A gömbfelület forgásszimmetriája miatt elegendő a gömb egy síkmetszetének, az optikai tengelyre illeszkedő egyik főkörének képét meghatároznunk, a teljes kép ezen görbe megforgatásából adódó forgásfelület lesz.

Tekintsük a lencse egyik ( $F_1$ ) fókuszpontja körüli  $r$  sugarú kör valamely  $R$  pontját, és szerkesszük meg két nevezetes sugár segítségével az  $R$ -nek megfelelő  $P$  képpontot (1. ábra). Célszerű a  $P$  pontot a másik ( $F_2$ ) fókuszpontba helyezett derékszögű koordináta-rendszerbeli  $(x, y)$  számpárral jellemezni.

Az  $OR'R$  és  $OP'P$  háromszögek hasonlóságából

$$\frac{y}{x+f} = \frac{T}{t},$$

az  $F_2P'P$  és  $F_2OQ$  háromszögek hasonlóságából pedig

$$\frac{y}{x} = \frac{T}{f}$$

következik. (A szokásos módon  $t$  az  $R$  pontnak megfelelő tárgytávolságot,  $T$  pedig a tárgy méretét jelöli.) Ezekből az arányokból  $T$  és  $t$  kifejezhető  $x$  és  $y$  segítségével:

$$T = f \frac{y}{x}, \quad \text{illetve} \quad t = f + \frac{f^2}{x}.$$

Használjuk ki, hogy  $R$  és  $F_1$  távolsága  $r$ :

$$(t - f)^2 + T^2 = r^2,$$

ahonnan  $t$  és  $T$  behelyettesítése és algebrai átalakítások után

$$\left(\frac{rx}{f^2}\right)^2 - \left(\frac{y}{f}\right)^2 = 1$$

adódik. Ez az összefüggés egy hiperbolát ír le, melynek az optikai tengellyel párhuzamos „valós féltengelye”  $f^2/r$ , „képzetes féltengelye” pedig  $f$  hosszúságú. (Ugyanez az összefüggés természetesen a „lencsetörvény” és a „nagyítási törvény” alkalmazásával is megkapható.)

A teljes gömbfelület képe a hiperbola mindkét ágának megforgatásából adódó ún. kétköpenyű forgáshiperboloid lesz (2. ábra). A gömb egyik ( $t > f$  módon jellemezhető) felének képe *valódi* kép, az ábra jobb oldalán látható hiperboloid-köpeny. A másik (a lencséhez közelebb eső) félgömb képe *látászólagos* (virtuális) kép, ennek a bal oldali „köpeny” felel meg. A lencse fókuszsíkjaiban fekvő kör pontjairól nem jön létre kép, a hozzá közeli pontok képei pedig valamelyik hiperboloid-felületen nagyon messze (határesetben a „végtelenben”) alakulnak ki. (Ha a gömb nem átlátszó, akkor természetesen csak a lencséhez közelebbi felének virtuális képe jön létre.)

*Több dolgozat alapján*

**Megjegyzés.** A megoldás során feltételeztük, hogy a lencse vékony, és hogy a képalkotás torzításmentes. Ez utóbbihoz az (is) szükséges, hogy a képalkotásban részt vevő fénysugarak az optikai tengellyel majdnem párhuzamosan haladjanak, ez pedig akkor teljesül, ha a lencse fókusz távolsága a gömb sugaránál is és a lencse átmérőjénél is sokkal nagyobb. A megoldásban szereplő ábrák méretaránya tehát a erősen torzított, vagy ha ténylegesen ilyenek az arányok, akkor a kiszámított képfelületnek csak egy kis darabját szabad elfogadnunk.

Hasonló okok miatt nincs sok értelme a lencsébe nyúló, vagy azt magába foglaló gömb ( $r \geq f$ ) esetét tanulmányoznunk. Matematikailag érdekes ugyan a paraméterek teljes tartományának vizsgálata, és az  $r > f$  eset a „dróthálóba bujtatott” lencsével még fizikailag is megvalósítható, a leképezés torzításai miatt azonban ennek elemzése a ténylegesen tapasztalható képalkotás szempontjából érdektelen.



