

A jelenség arra vezethető vissza, hogy a napok deleléstől delelésig számított hossza az év során változik. Budapest a keleti szélesség 19. fokán van, az időzóna közepétől 4 fokkal keletre, ezért a Napnak (téli közép-európai idő szerint) 16 perccel dél előtt, 11 óra 44 perckor kellene delelnie. Az ettől való eltérést megadó összefüggést a csillagászok időegyenletnek nevezik. A delelés időpontjából levonva, illetve hozzáadva a nappal hosszának felét megkapjuk a napkelte, illetve a napnyugta időpontját, ezeket hasonlíthatjuk össze a zsebnaptárak adataival.

Először a nappal hosszát számítjuk ki. A napkelte és a napnyugta azzal jellemezhető, hogy a Nap sugarai merőlegesek a Föld középpontjából az adott földrajzi pontba mutató vektorra (1. ábra). Ha a Nap sugarai δ szöget zárnak be az Egyenlítő síkjával (vagyis a Nap az Ekliptikán a δ szélességi körön jár), akkor a sugarak irányvektora

$$\mathbf{e} = (0, -\cos \delta, -\sin \delta).$$

A θ földrajzi szélességi pont helyvektora

$$\mathbf{r} = R(-\cos \theta \sin t, \cos \theta \cos t, \sin \theta),$$

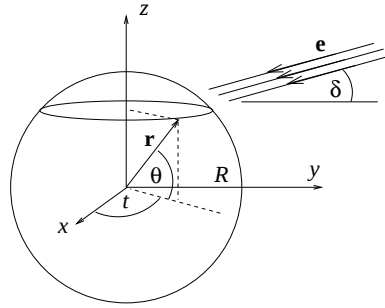
ahol $t = 360^\circ/24 \text{ óra} \cdot \text{az eltelt idő}$ (valamely kezdeti időponthoz képest). A vektorok merőlegességéből adódik, hogy

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = -R(\cos \theta \cos t \cos \delta + \sin \theta \sin \delta) = 0,$$

amiből

$$(1) \quad \cos t = -\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \delta.$$

Az egyenlet t_1 és t_2 gyökeinek különbsége megadja az adott földrajzi szélességen és az adott napállásnál a nappal hosszát. Például az északi féltekén ($\theta > 0$) nyáron ($\delta > 0$) $t_1 - t_2 > 12 \text{ h}$. Előfordulhat, hogy az (1) egyenletnek nincs megoldása, mert a jobb oldal értéke nagyobb 1-nél. Ez azt jelenti, hogy az adott földrajzi szélességen a Nap nem megy le, vagy nem kel föl.



A következő feladat az időegyenlet megmagyarázása. Az egyes lexikonokban megtalálható furcsa alakú függvény két hatás együttes eredményeként származtatható: 1. A Föld az ellipszis pályán nem állandó szögsebességgel kering a Nap körül. 2. A Föld tengelyferdesége miatt a Nap látszólagos pályája (az Ekliptika) $\gamma = 23^\circ 27'$ szöget zár be az Egyenlítővel, és a Nap az Ekliptikán mozog közelítőleg egyenletesen. Mindkét effektus kicsi, ezért hatásukat külön-külön határozzuk meg, majd ezeket összegezzük.

1. A Föld $T_{\text{cs}} = 23^{\text{h}} 56' 4''$ alatt fordul meg a tengelye körül az állócsillagokhoz képest (csillagnap). Kepler II. törvénye (a peridületmegmaradás) szerint a keringés szögsebessége a Naptól való távolság négyzetével fordítottan arányos. Az átlagos szögsebesség $\Omega_{\text{átl}} = 2\pi/(365,241 \text{ nap})$, ezért a Földnek átlagosan $\alpha_{\text{átl}} = 2\pi/365,241$ szöggel kell déltől dél felé (napi nap) többet fordulnia, mint egy teljes fordulat. Ezért egy napi nap átlagosan $\Delta T_{\text{átl}} = T_{\text{cs}} \cdot \alpha_{\text{átl}}/(2\pi) = 236 \text{ s}$ időtartammal hosszabb, mint egy csillagnap: $T_{\text{n}} = T_{\text{cs}} + 236 \text{ s} = 24 \text{ h}$.

A Nap–Föld távolság $R_{\text{min}} = 147,1 \cdot 10^6 \text{ km}$ és $R_{\text{max}} = 152,1 \cdot 10^6 \text{ km}$ között változik, átlagos értéke $R_{\text{átl}} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$. Kepler II. törvényét felhasználva azt kapjuk, hogy a csillagnaptól való legnagyobb, illetve legkisebb eltérés $\Delta T_{\text{max}} = \Delta T_{\text{átl}} \cdot (R_{\text{átl}}/R_{\text{min}})^2 \approx 228 \text{ s}$, illetve $\Delta T_{\text{min}} = \Delta T_{\text{átl}} \cdot (R_{\text{átl}}/R_{\text{max}})^2 \approx 224 \text{ s}$.

A Föld január 1-én, 2-án van legközelebb a Naphoz, ezért a napi nap ekkor a leghosszabb, $T_{\text{max}} = 24^{\text{h}} 8''$, július 3-án van a legtávolabb, ekkor $T_{\text{min}} = 23^{\text{h}} 59' 52''$. A pályaequation alapján levezethető, hogy a kis excentricitás miatt a napok hossza közelítőleg egy $A_{\Delta T} \approx 8 \text{ s}$ amplitúdójú koszinusz-függvény szerint változik:

$$T = 24\text{h} + A_{\Delta T} \cdot \cos \frac{2\pi(d-1,5)}{365},$$

ahol d az év elejétől eltelt napok száma, az 1,5-ös szám pedig a függvény január 1. és 2. közötti maximumából adódik. A kifejezés második tagja a delelés időpontjának egy napra jutó megváltozását adja meg, ezért a delelés időpontja (integrálással):

$$t_D = t_{D0} + \frac{365}{2\pi} \cdot A_{\Delta T} \cdot \sin \frac{2\pi(d-1,5)}{365} \approx 11^{\text{h}} 44' + 7,7' \cdot \sin \frac{2\pi(d-1,5)}{365}.$$

2. A Nap látszólagos mozgását az Ekliptikán közelítőleg egyenletesnek tekinthetjük (most elhanyagoljuk az ellipszispályából adódó kis hatásokat). Az Ekliptika az Egyenlítő síkjával $23^\circ 27'$ szöget zár be, a Napnak az Egyenlítő mentén mért Φ_{egy} koordinátája nem egyenletesen változik. A 2. ábra alapján

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi_{\text{ekl}} &= \frac{NA}{NO}, & \operatorname{tg} \Phi_{\text{egy}} &= \frac{N'A}{N'O} \\ N'A &= NA \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

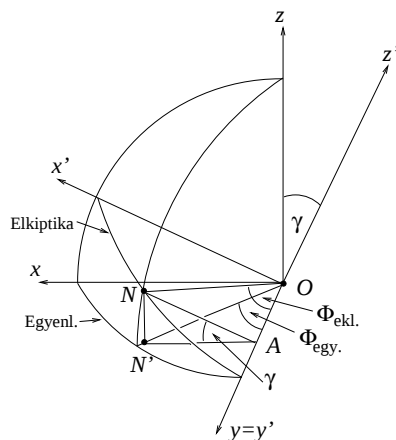
A fentiekből következik, hogy

$$\operatorname{tg} \Phi_{\text{egy}} = \cos \gamma \cdot \operatorname{tg} \Phi_{\text{ekl}}.$$

Az eltérésből $\tau = 24^{\text{h}}(\Phi_{\text{ekl}} - \Phi_{\text{egy}})/360^\circ$ időeltolódás adódik. (A Földnek még ennyit kell fordulnia ahhoz, hogy ott deleljen a Nap, ahol delelné akkor, ha az Ekliptika egybeesne az Egyenlítővel.) Meg lehet mutatni, hogy a $\Phi_{\text{ekl}} - \Phi_{\text{egy}}$ különbség maximális értéke kb. $2,5^\circ$. Kihasználva ennek kicsinségét, és azt, hogy $\cos \gamma$ közel van 1-hez, levezethető, hogy az így adódó időeltolódás jó közelítéssel

$$\tau = 9,8' \cdot \sin \frac{4\pi(d+9)}{365},$$

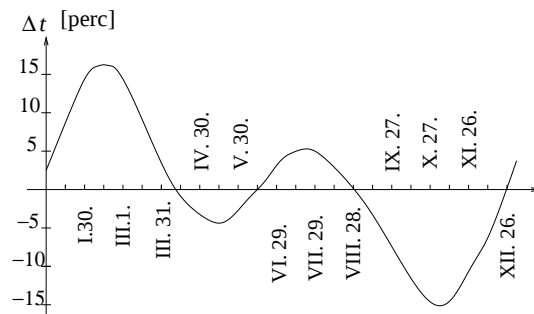
ahol d ismét az év elejétől eltelt napok száma, a $+9$ pedig abból adódik, hogy a függvény december 22-én, a téli napfordulókör (és a nyári napfordulónál, meg a napéjegyenlőségek idején) veszi fel a nulla értéket. (Ekkor ugyanis $\Phi_{\text{ekl}} = \Phi_{\text{egy}}$.)



A delelés időpontját tehát (közelítőleg) a

$$(2) \quad t_D = 11^{\text{h}} 44' + 7,7' \cdot \sin \frac{2\pi(d-1,5)}{365} + 9,8' \cdot \sin \frac{4\pi(d+9)}{365} = 11^{\text{h}} 44' + \Delta t$$

függvény adja meg. A napkeltenek és a napnyugtának a *deleléshez viszonyítva* egyszerre van szélsőértéke, nevezetesen december 22-én és június 22-én. A napkelte és a napnyugta *valódi ideje* viszont az időegyenlet miatt már nem ugyanakkor veszi fel szélsőértékét. Az időegyenletet a 3. ábra, a napkelte és napnyugta téli szélsőértékeit a 4. ábra mutatja.



Megjegyezzük még, hogy a nappal hosszát a fentiekén kívül a légkör optikai hatása is befolyásolja (például március 21-én, a „napéjegyenlőségkor” a nappal kb. $12^{\text{h}} 10'$ hosszú).

G. L. és V. P.

