

I. megoldás. Ha egy kezdetben nyugvó, hosszú kötélen egyik végét t ideig periodikusan mozgatjuk, akkor P átlagos teljesítmény esetén Pt munkát végzünk. Ezalatt a kötélen ct hosszúságú, tehát $m = \rho ct$ tömegű darabja jön mozgásba. Számítsuk ki, mekkora átlagos mozgási és rugalmas energiája van ennek a kötélrésznek!

A kötélen minden darabkájára A amplitúdójú, $\omega = 2\pi f$ körfrekvenciájú harmonikus rezgőmozgást végez, tehát a legnagyobb sebessége $v_{\max} = A\omega$. Ha a sebesség legnagyobb értékével számolnánk, akkor a mozgási energiára $\frac{1}{2}mv_{\max}^2$ értéket kapnánk, de mivel a sebesség nagysága nulla és $v_{\max}$ között váltakozik, az időben átlagolt mozgási energia (a váltóáramok effektív teljesítményéhez hasonlóan) a fenti értéknek csupán a fele:

$$E_{\text{mozg}} = \frac{1}{4}\rho ct \cdot (A\omega)^2.$$

A kötélnak (ha benne hullámok terjednek) a helyzeti energiája is megnő. (Longitudinális hullámok esetén ez rugalmas energiát jelent, megfeszített kötélen terjedő transzverzális hullámoknál pedig a feszítőerőt létesítő súly gravitációs helyzeti energiájának növekedésével azonosítható.) A helyzeti energia átlagos értéke és a mozgási energia átlagos értéke — hasonlóan, mint egyetlen rezgő testnél — éppen egyenlő, a kötélen teljes energiája tehát $E_{\text{teljes}} = 2E_{\text{mozg}}$. A munkatétel szerint

$$Pt = 2 \cdot \frac{1}{4}\rho ct A^2 \omega^2,$$

ahonnan a keresett átlagos teljesítmény $P = 2c\rho\pi^2 f^2 A^2$.

II. megoldás. Egy F erővel megfeszített kötélen $c = \sqrt{F/\rho}$ sebességgel terjednek a transzverzális hullámok. Az A amplitúdójú, ω körfrekvenciájú hullámokat leíró függvény:

$$u(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

ahol $u(x, t)$ a kötélen x távolságra levő rész elmozdulása a t időpillanatban.

A kötélen vége (az $x = 0$ adattal jellemezhető pont)

$$v(t) = \frac{\Delta u(0, t)}{\Delta t} = \frac{u(0, t + \Delta t) - u(0, t)}{\Delta t} = A\omega \cos \omega t$$

sebességgel mozog. (Kihasználtuk, hogy a szinuszfüggvény „változási üteme” a koszinusz függvénnyel adható meg; ld. egy tömegpont harmonikus rezgőmozgását). Ugyanakkor a kötélen végének „meredeksége”, vagyis térbeli változási üteme

$$\text{tg } \alpha = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = -\frac{A\omega}{c} \cos \omega \left(t + \frac{x}{c} \right).$$

A kötélen meredeksége miatt a végpontjánál az x tengely irányú F nagyságú erő mellett egy arra merőleges

$$F_1(t) = -F \text{tg } \alpha(x = 0, t) = \frac{FA\omega}{c} \cos \omega t$$

erőt is ki kell fejtenuünk.

A pillanatnyi teljesítmény (amit a kötélen végét mozgató ember fejt ki, illetve amelynek megfelelő ütemben csökken a kötélen végén mozgó test energiája)

$$P(t) = F_1(t) \cdot v(t) = \frac{FA^2\omega^2}{c} \cos^2 \omega t.$$

Ennek a teljesítménynek időbeli átlaga (mivel $\cos^2 \omega t$ átlaga $\frac{1}{2}$)

$$P_{\text{átlag}} = \frac{1}{2c}FA^2\omega^2 = \frac{1}{2}\rho cA^2(2\pi f)^2.$$

Több dolgozat alapján

