

A Bohr-féle kvantumfeltétel szerint az r sugarú körpályán keringő v sebességű részecske perdülete $\hbar = h/(2\pi)$ egész számú többszöröse, vagyis

$$mvr = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Másrészt az m tömegű részecske mozgásegyenlete a klasszikus fizikában

$$\frac{mv^2}{r} = kr.$$

Ezekből az egyenletekből kifejezhetjük a pályasugarakat:

$$r_n = \sqrt{\frac{n\hbar}{\sqrt{km}}} = \sqrt{n} \cdot r_1.$$

A részecske energiája az $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási energia és az $\frac{1}{2}kr^2$ helyzeti energia összegeként áll elő. (A helyzeti energiát a megnyújtott rugó rugalmas energiájának mintájára írtuk fel, de kiszámíthatjuk az origóból r távolságra kimozdított testre ható átlagos $kr/2$ erő és az elmozdulás szorzataként is.) Az n -edik pályához tartozó energia tehát

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 + \frac{1}{2}kr_n^2.$$

A mozgásegyenlet és r_n fenti értékének felhasználásával az energia így írható:

$$E_n = n\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} = n \cdot E_1.$$

Hegedűs Ákos (Pécs, Ciszterci Nagy Lajos Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A helyzeti energiát a vonzócentrumban választottuk nullának, így minden más helyen pozitív értékű lesz. Sokan – hibásan – a helyzeti energiát az erőtvényben szereplő negatív előjel miatt $-kr^2/2$ -nek adták meg, mások (az erő és az elmozdulás szorzatára hivatkozva) a $-kr^2$, vagy esetleg a $+kr^2$ (ugyancsak hibás) alakot használták. Akik (a hibás képlettel számolva) a részecske energiájára negatív számokat kaptak, ezt az eredményt azzal hozták összefüggésbe, hogy a részecske „kötött állapotban” van. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az összenergia negatív volta csak akkor jelent kötött állapotot, ha a helyzeti energiát a végtelenben választjuk nullának. Így járunk el pl. a Coulomb-potenciálnál, vagy a gravitációs helyzeti energia számításánál.)

A kitéréssel arányos „rugóerőnél” a potenciális energia a nulla kitéréshez viszonyítva mindig pozitív, de a „végtelen nagy” távolságnak megfelelő helyzethez viszonyítva negatív, emiatt csak kötött állapotokat hozhat létre.

2. A Bohr-féle kvantumfeltétel a feladatban szereplő erőtvény esetén (és még néhány esetben) véletlenül ugyanazt az eredményt adja, mint az (anyaghullámokra vonatkozó egyenletekkel megfogalmazott) „igazi kvantumelmélet”. Általában azonban a két leírásmód eltér egymástól, és a tapasztalat a hullámmechanikának ad igazat.

3. A feladatban szereplő erőtvénnyel jól leírható a molekulák rezgése. Az ún. vibrációs színek két lehetséges energiaszint közötti átmenetkor figyelhető meg. A kibocsátott, vagy elnyelt foton frekvenciája két szomszédos állapot közti átmenetkor

$$f = \frac{|E_n - E_{n\pm 1}|}{h} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}},$$

ami megegyezik a megadott erőtvény szerint mozgó részecske klasszikus keringési, illetve rezgési frekvenciájával.