

Legyen  $M$  azoknak a pozitív egészekből álló  $(x, y)$  számpároknek a száma, amelyekre  $x^2y \leq N^2$ . Megmutatjuk, hogy mindkét oldalon  $M$  áll.

Először megjegyezzük, hogy minden számpárban  $x \leq N$  és  $y \leq N^2$ .

Csoportosítsuk a számpárokat az első tagjuk szerint. Ha  $1 \leq x \leq N$  rögzített, akkor  $y$ -ra az  $1 \leq y \leq \frac{N^2}{x^2}$  egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Az ilyen  $y$ -ok száma  $\left[ \frac{N^2}{x^2} \right]$ . Ezeket minden  $x$ -re összeadva kapjuk, hogy

$$M = \sum_{x=1}^N \left[ \frac{N^2}{x^2} \right] = \left[ \frac{N^2}{1^2} \right] + \left[ \frac{N^2}{2^2} \right] + \cdots + \left[ \frac{N^2}{(N-1)^2} \right] + \left[ \frac{N^2}{N^2} \right].$$

Csoportosítsuk a párokat most a második tagjuk szerint. Ha  $1 \leq y \leq N^2$  rögzített, akkor  $x$ -et úgy kell választanunk, hogy  $1 \leq x^2 \leq \frac{N^2}{y}$ , azaz  $1 \leq x \leq \frac{N}{\sqrt{y}}$  teljesüljön. Az ilyen  $x$ -ek száma  $\left[ \frac{N}{\sqrt{y}} \right]$ , ezért

$$M = \sum_{y=1}^{N^2} \left[ \frac{N}{\sqrt{y}} \right] = \left[ \frac{N}{\sqrt{1}} \right] + \left[ \frac{N}{\sqrt{2}} \right] + \cdots + \left[ \frac{N}{\sqrt{N^2-1}} \right] + \left[ \frac{N}{\sqrt{N^2}} \right].$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.