Tegyük föl, hogy Ali Baba x font aranyat és y font gyémántot rak zsákjába. Határozzuk meg először, hogy ez milyen x és y esetén lehetséges. Összesen nem vihet el többet 100 fontnál, ezért

$$x + y \leq 100.$$

Nyilvánvaló, hogy $x \geq 0$, $y \geq 0$, hiszen csak nemnegatív mennyiségekről lehet szó. Még azt kell biztosítani, hogy a kincsek bele is férjenek a zsákba, azaz a térfogatuk sem lehet tetszőlegesen nagy, Ha gyémántból 40 font fér a zsákba, akkor 1 font gyémánt a zsák $\frac{1}{40}$, y pedig az $\frac{y}{40}$ részét tölti meg. Hasonlóan x font arany a zsák $\frac{x}{200}$ részét tölti meg. A feltétel tehát

$$\frac{x}{200} + \frac{y}{40} \leq 1.$$

A lehetséges $(x;y)$ számpárok ezek szerint az

$$F = \left\{(x;y):\ x \geq 0,\ y \geq 0, \qquad x + y \leq 100, \qquad \frac{x}{200} + \frac{y}{40} = 1\right\}$$

halmazt alkotják. Az F elemeinek megfelelő ponthalmazt koordináta-rendszerben is ábrázolhatjuk (*1. ábra*). A kapott alakzat egy $ABCD$ négyszög, C csúcsának koordinátái legyenek x_0, y_0. Ezekre

$$x_0 + y_0 = 100 \qquad \text{és} \qquad \frac{y_0}{40} + \frac{x_0}{200} = 1.$$

A második egyenletből $x_0 = 200 - 5y_0$, ezt az elsőbe írva $200 - 4y_0 = 100$, azaz $y_0 = 25$ és $x_0 = 75$.

Adott x, y esetén a kincsekért cserébe $20x + 60y$ tevét adnak. Keressük tehát a bevonalkázott terület pontjai közül azt (vagy azokat), amely(ek)re $20x + 60y$ (nevezzük ezt *célfüggvénynek*) értéke a lehető legnagyobb. Ezt úgy is megtehetjük, hogy meghatározzuk azt a legnagyobb c-t, amire még a

$$20x + 60y = c \tag{1}$$

egyenletnek van F-beli $(x;y)$ megoldása. Ezt ugyanis elérheti a célfüggvény, nagyobbat már nem; a keresett x, y párt pedig (1) megoldása adja.

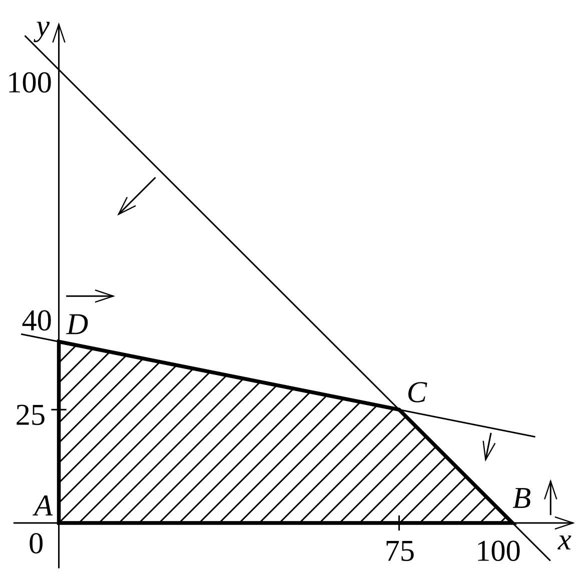
A $20x + 60y = c$ egyenletű egyenesek közül néhányat berajzoltunk a *2. ábrába*. Ezek egymással párhuzamosak, és c növelésekor a nyíllal jelölt irányba tolódnak el. A kérdés ezek szerint az, hogy meddig tolhatjuk „fölfelé” az ilyen irányú egyeneseket úgy, hogy még legyen közös pontjuk F-fel. Nyilvánvaló, hogy ez a közös pont határesetben az F csúcsainak valamelyike lesz (előfordulhat, hogy van más közös pont is, de mindig található köztük csúcs). Elegendő tehát az A, B, C, D pontokban kiszámítani a célfüggvény értékét, s amelyiknél a legnagyobb, ahhoz tartozik a keresett c. Az $A(0;0)$ pontra $c = 20x + 60y = 0$; a $B(100;0)$-ra $c = 2000$; $C(75;25)$-re $c = 3000$; $D(0;40)$-re $c = 2400$. A legjobb megoldás tehát 25 font gyémánt és 75 font arany, amiért 3000 tevét lehet kapni.

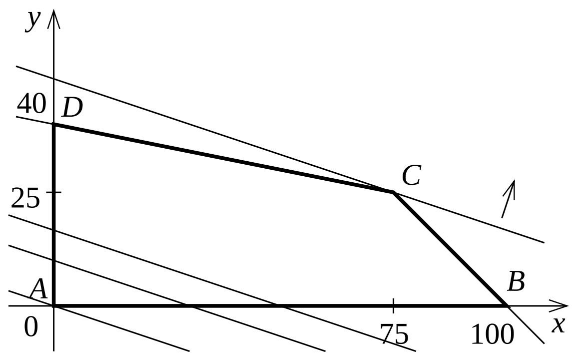
ifj. Zsíros András (Nyíregyháza, Evang. Kossuth L. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Ellenőrizhető, hogy a $(75;25)$ az egyedüli F-beli pont, amire $c = 3000$. Ez a következő meggondolásból is látszik. Ha nem ez lenne az egyedüli pont, akkor a $c = 3000$-hez tartozó „határhelyzetű” egyenes F-et több pontban is metszené, ezek között lenne további csúcs is, ami – mint a számokból látható – lehetetlen.

Mindezekből leszűrhető a következő általános észrevétel. Ha egy lineáris célfüggvényt akarunk egy poliéderen maximalizálni, a maximumhelyet elég a csúcsok között keresni. Ha itt a maximum egyértelmű, akkor az a csúcs az egész halmazon is az egyetlen maximumhely.

Ha nem az, akkor látható, hogy a maximumot jelentő csúcsok által alkotott lap valamennyi pontja maximumhely. Ugyanez persze minimumfeladatnál is igaz. Ez a kérdéskör a *lineáris programozás* elméletéhez tartozik.




y
40
D
C
25
A
B
x
0
75
100