

Használjuk az 1. ábra jelöléseit. Legyen $AB = BP = DP = a$, $AD = BC = AP = 1$ és $\angle DAP = \alpha$. A feltételek szerint az $ADP\triangle$ és $ABP\triangle$ egyenlő szárú, és mindkét háromszög szögei α -val kifejezhetők. Az AF és BG magasságok meghúzása után keletkező derékszögű háromszögekből $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}$, illetve $\sin \alpha = \frac{1}{2a}$. Ha létezik olyan α szög és a pozitív szám, amelyek kielégítik ezeket az egyenleteket, akkor a feladat feltételeinek megfelelő téglalap is létezik. A két egyenlet szorzatából

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{1}{4}, \quad \text{azaz } \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}, \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}, \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}, \cos^3 \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{8} = 0.$$

Az $f(\alpha) = \cos^3 \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{8}$ függvény folytonos, az $\alpha = 0$ helyen pozitív, hiszen $f(0) = \frac{1}{8}$, az $\alpha = \frac{\pi}{2}$ helyen pedig negatív, hiszen $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{8} < 0$. Ezért Bolzano tétele szerint a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban van olyan α_0 szög, amelyre $f(\alpha_0) = 0$. Tehát a feladatban kért téglalap létezik. Pontosabb függvényvizsgálattal belátható, hogy egyetlen ilyen α_0 létezik, és $\alpha_0 \approx 43^\circ$, innen a téglalap kisebbik oldala $a \approx 0,733$.

Kováts Antal (Budapest, ELTE Radnóti M. Gyak. Gimn., IV. o.t.)

Megjegyzés. Eredményünk azt jelenti, hogy a kapott $ABCD$ téglalapban az A körüli és D -n átmenő, a D körüli és C -n átmenő, végül a B körüli és A -n átmenő körök egy P ponton mennek át (2. ábra).

