

Vegyük azt az esetet, amikor a kis körök a nagy körön belül vannak.

Legyen a k kör sugara R , középpontja O , k_1 és k_2 sugara r_1 és r_2 , középpontja O_1 és O_2 . Legyen a P_1OP_2 szög α .

A koszinusztételt felírjuk OO_1O_2 háromszögre:

$$(r_1 + r_2)^2 = (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2) \cos \alpha.$$

Mivel $R \neq r_{1,2}$, azért

$$\cos \alpha = \frac{(R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - (r_1 + r_2)^2}{2(R - r_1)(R - r_2)} = \frac{R^2 - Rr_1 - Rr_2 - r_1r_2}{(R - r_1)(R - r_2)} = 1 - \frac{2r_1r_2}{(R - r_1)(R - r_2)}.$$

A koszinusztételt felírva P_1OP_2 -re: (kihasználva a $\cos \alpha$ -ra kapott kifejezést):

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha = \\ &= 2R^2(1 - \cos \alpha) = 2R^2 \frac{2r_1r_2}{(R - r_1)(R - r_2)}, \end{aligned}$$

így

$$P_1P_2 = 2R \sqrt{\frac{r_1r_2}{(R - r_1)(R - r_2)}}.$$

Hasonló összefüggéseket írhatunk fel $P_2P_3, \dots, P_6P_1$ -re is. Ezek alapján észrevehető, hogy

$$P_1P_2 \cdot P_3P_4 \cdot P_5 \cdot P_6 = P_2P_3 \cdot P_4P_5 \cdot P_6P_1,$$

hiszen mindkét oldalon $8R^3 \sqrt{\frac{r_1 \cdot \dots \cdot r_6}{(R - r_1) \cdot \dots \cdot (R - r_6)}}$ áll.

Ez azonban pontosan azt jelenti, hogy a P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6 húrok egy ponton mennek át. (**F. 3009.**, KöMaL 1994/10, 500. o.)

Hasonló a megoldás akkor is, ha $k_1, \dots, k_6$ kívülről érinti k -t, csak akkor r_k helyére mindenhol $-r_k$ -t kell írni.

