Legyen $a_n = \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$, ekkor $a_1 = 1$, $a_2 = x + y$, és tetszőleges $n \geq 1$-re

$$a_{n+2} = \frac{x^{n+2} - y^{n+2}}{x - y} = \frac{(x+y)\left(x^{n+1} - y^{n+1}\right) - \left(xy^{n+1} - yx^{n+1}\right)}{x - y} = (x+y)a_{n+1} - xya_n.$$

Ha megmutatjuk, hogy $x + y$ és xy is egész, ekkor egyrészt a_1 és a_2 egészek, másrészt, ha a_{k+1} és a_k egészek, akkor szükségképpen $a_{k+2} = (x+y)a_{k+1} - xya_k$ is egész. Ebből – az n-re vonatkozó indukcióval – már következik, hogy a_m minden m-re egész.

Tegyük fel, hogy (valamilyen n-re) a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3} valamennyien egészek. Mivel

$$a_n a_{n+3} - a_{n+1}a_{n+2} = \frac{(x^n - y^n)\left(x^{n+3} - y^{n+3}\right) - \left(x^{n+1} - y^{n+1}\right)\left(x^{n+2} - y^{n+2}\right)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{x^n y^n \left(x^2 y + xy^2 - x^3 - y^3\right)}{(x-y)^2} = \frac{x^n y^n (x+y)\left(2xy - x^2 - y^2\right)}{(x-y)^2} = -x^n y^n (x+y),$$

azért $x^n y^n (x+y)$ is egész. Hasonlóan

$$a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = \frac{\left(x^{n+2} - y^{n+2}\right)(x^n - y^n) - \left(x^{n+1} - y^{n+1}\right)^2}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{x^n y^n \left(2xy - x^2 - y^2\right)}{(x-y)^2} = -x^n y^n$$

miatt $x^n y^n$ egész. A fenti egyenlőségben n helyébe $(n+1)$-et írva kapjuk, hogy $a_{n+2}^2 - a_{n+3}a_{n+1} = x^{n+1}y^{n+1}$ is egész; így $xy = \dfrac{x^{n+1}y^{n+1}}{x^n y^n}$ (vagy 0) racionális szám. Ennek a racionális számnak az n-edik hatványa egész, ami csak úgy lehetséges, ha xy is egész.

Ha $xy = 0$, akkor például $y = 0$ esetén $a_n = x^{n-1}$, $a_{n+1} = x^n$ egészek lévén x racionális, ezért (egész szám n-edik gyökeként) egész; így minden k-ra $a_k = x^{k-1}$ is egész. (Hasonlóan járhatunk el $x = 0$ esetén is.) A továbbiak során feltehetjük, hogy $xy \neq 0$. Mint láttuk, $x^n y^n (x+y)$ egész, ezért $x + y$ racionális. Tegyük fel, hogy $x + y$ nem egész, azaz $x + y = \dfrac{p}{q}$, ahol p és q egymáshoz relatív prím egészek és $q \geq 2$. Ekkor ($a_1 = 1$ és) $a_2 = x + y = \dfrac{p}{q}$,

$$a_3 = \frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy = \frac{p^2}{q^2} - xy = \frac{p^2 - q^2 xy}{q^2},$$

ahol $p^2 - q^2 xy$ és q^2 is relatív prímek. A k-ra vonatkozó indukcióval megmutatjuk, hogy minden k pozitív egészre $a_k = \dfrac{p_k}{q^k}$, ahol p_k a q^k-hoz relatív prím egész. Valóban, ha $a_{k-2} = \dfrac{p_{k-2}}{q^{k-2}}$ és $a_{k-1} = \dfrac{p_{k-1}}{q^{k-1}}$, akkor

$$a_k = (x+y)a_{k-1} - xya_{k-2} = \frac{pp_{k-1}}{q^k} - xy\frac{p_{k-2}}{q^{k-2}} = \frac{pp_{k-1} - xyq^2 p_{k-2}}{q^k}.$$

Itt p és p_{k-1} a q-hoz relatív prím, amelyek szorzatához a q-val osztható $xyq^2 p_{k-2}$ számot adva ismét a q-hoz (s így q^k-hoz) relatív prím értéket kapunk. Alkalmazzuk a kapott eredményt $k = n$-re, eszerint $a_n = \dfrac{p_n}{q^n}$, ellentmondva annak, hogy a_n egész. Tehát $x + y$ is egész.

Valkó Benedek (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.)