Legyenek a és b tetszőleges nemnegatív számok, legalább egyikük nullától különböző. Definiáljuk a (c_n) sorozatot a következőképpen:

$$c_1 = a + b, \quad c_2 = a, \quad c_{n+2} = |c_{n+1}| - c_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ekkor $c_3 = -b$, $c_4 = b - a$, $c_5 = |b - a| + b$, $c_6 = |b - a| + a$, $c_7 = a - b$, $c_8 = -a$, $c_9 = b$, $c_{10} = a + b$, $c_{11} = a$.q Látható, hogy $c_{10} = c_1$, $c_{11} = c_2$, így – a rekurziót felhasználva – az n -re vonatkozó indukcióval igazolható, hogy a (c_n) sorozat periodikus és egy periódusa 9. Jelölje k a sorozat legkisebb periódusát. Osszuk el 9-et maradékosan k-val: $9 = qk + m$, $0 \le m < k$; ekkor minden n pozitív egészre $c_{n+m} = c_{n+9-qk} = c_{n-qk} = c_n$, azaz m is periódus. A k minimalitása miatt ez csak úgy lehetséges, hogy $m = 0$. vagyis k osztója a 9-nek. Tegyük fel, hogy $k \mid 3$, ekkor

$$0 \le |b - a| + b = c_5 = c_8 = -a \le 0,$$

tehát $a = 0 = |b - a| + b$, azaz $a = b = 0$, amit kizártunk. Így k csak 9 lehet.

Legyen ezután (a_n) egy, a feladat követelményeit kielégítő sorozat. Öt esetet különböztetünk meg.

I. eset: $a_1 < 0$, $a_2 < 0$. Legyen $a = -a_2$, $b = -a_1 - a_2$, ekkor az ezekből képezett (c_n) sorozat megfelelő elemeire $c_7 = a - b = a_1$, $c_8 = -a = a_2$, ezért minden pozitív egész n-re $a_n = c_{n+6}$. A feladat (mindkét) állítása ebben az esetben a (c_n) sorozat bizonyított tulajdonsága miatt igaz.

II. eset: $a_1 < 0$, $a_2 \ge 0$. Legyen $a = -a_1$, $b = a_2$, ekkor az a, b-hez tartozó (c_n) sorozat elemeire $c_8 = -a = a_1$, $c_9 = b = a_2$, így $a_n = c_{n+7}$ igazolja a feladat állítását.

III. eset: $a_1 \ge 0$, $a_2 < 0$. Legyen $a = a_1$, $b = -a_2$, ekkor az előbbiekhez hasonlóan $c_2 = a = a_1$, $c_3 = -b = a_2$, $a_n = c_{n+1}$.

IV. eset: $a_1 > a_2 \ge 0$. Legyen $a = a_2$, $b = a_1 - a_2$, ekkor $c_1 = a + b = a_1$, $c_2 = a = a_2$, $a_n = c_n$.

V. eset: $a_2 \ge a_1 \ge 0$. Legyen $a = a_2 - a_1$, $b = a_1$. Nyilván a és b csak úgy lehetne egyszerre nulla, ha a_1 és a_2 is az. Ezúttal $c_9 = b = a_1$, $c_{10} = a + b = a_2$ miatt $a_n = c_{n+8}$.

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., II. o.t.)