

A megoldás során felhasználjuk a „Játék mindenkinek” rovatunkhoz fűzött megjegyzésekben olvashatókat. (KöMaL 1994/8–9. sz., 430–432. o.)

Terjesszük ki p_n definícióját $n = 0, -1, -2, -3$ -ra a következőképpen:

$$(1) \quad p_{-1} = p_{-2} = p_{-3} = 0, \quad p_0 = 1.$$

(Ezeknek teljesen szemléletes jelentése van.) Világos, hogy az n -edik mezőre az $(n-1)$ -edik, $(n-2)$ -edik, $(n-3)$ -adik és $(n-4)$ -edik mezőről léphetünk, a megfelelő utolsó dobás valószínűsége $\frac{1}{4}$, ezért a teljes valószínűség tétele alapján

$$p_n = \frac{1}{4}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{1}{4}p_{n-3} + \frac{1}{4}p_{n-4} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

vagyis

$$(2) \quad p_n - \frac{1}{4}p_{n-1} - \frac{1}{4}p_{n-2} - \frac{1}{4}p_{n-3} - \frac{1}{4}p_{n-4} = 0.$$

E sorozat karakterisztikus polinomja:

$$p(x) = x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}.$$

Legyenek a $p(x) = 0$ egyenlet gyökei, ideértve a komplexeket is, $z_1, z_2, \dots, z_k$, multiplicitásuk rendre $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, azaz $p(x)$ gyöktényezős alakja

$$p(x) = (x - z_1)^{\alpha_1} (x - z_2)^{\alpha_2} \dots (x - z_k)^{\alpha_k}.$$

Ismeretes, hogy a (p_n) sorozat n -edik eleme

$$(3) \quad p_n = a_1(n)z_1^n + a_2(n)z_2^n + \dots + a_k(n)z_k^n$$

alakú, ahol $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) valamilyen α_i -nél alacsonyabb fokú polinom; és megfordítva, ha a sorozat ilyen alakú, akkor igaz rá a rekurzió.

A $p(x)$ polinom egyik gyöke az 1, és ez csak egyszeres gyök, mert

$$(4) \quad p(x) = (x - 1) \left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right),$$

és a második tényezőnek az 1 nem gyöke. A többi gyök abszolút értékben 1-nél kisebb, mert $|x| \geq 1$ esetén $|p(x)| \geq |x|^4 - |x|^3 \geq 0$, és egyenlőség csak akkor van, ha $x = 1$. Így a_1 konstans polinom, és a (3) többi tagja zérushoz tart, ha n tart a végtelenhez.

Most meghatározzuk a_1 -et, ami az előbbieket alapján a p_n sorozat határértéke. Defináljuk a q_n sorozatot a következőképpen:

$$(5) \quad q_n = a_2(n)z_2^n + \dots + a_k(n)z_k^n = p_n - a_1.$$

A q_n sorozatra (4) miatt fennáll, hogy

$$q_n + \frac{3}{4}q_{n-1} + \frac{1}{2}q_{n-2} + \frac{1}{4}q_{n-3} = 0,$$

azaz

$$(p_n - a_1) + \frac{3}{4}(p_{n-1} - a_1) + \frac{1}{2}(p_{n-2} - a_1) + \frac{1}{4}(p_{n-3} - a_1) = 0.$$

Behelyettesítve $n = 0$ -t,

$$(1 - a_1) + \frac{3}{4}(0 - a_1) + \frac{1}{2}(0 - a_1) + \frac{1}{4}(0 - a_1) = 0,$$

amiből $a_1 = \frac{2}{5}$. Tehát

$$(6) \quad \lim p_n = \frac{2}{5}.$$

Megbecsüljük a konvergencia sebességét. Mivel

$$\left(x - \frac{2}{5}\right) \left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = x^4 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x - \frac{1}{6},$$

a q_n sorozatra a

$$q_n + \frac{1}{12}q_{n-1} - \frac{1}{12}q_{n-3} - \frac{1}{6}q_{n-4}$$

rekurzió is teljesül. Ebből következik, hogy

$$|q_n| \leq \frac{1}{12}|q_{n-1}| + \frac{1}{12}|q_{n-3}| + \frac{1}{6}|q_{n-4}| \leq \frac{1}{3} \max(|q_{n-1}|, |q_{n-3}|, |q_{n-4}|).$$

Bebizonyítjuk, hogy $|q_n| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n/4}$. Ez $n = -3, -2, -1, 0$ esetén könnyen ellenőrizhető. Ha pedig igaz $n < m$ esetén ($m = 1, 2, \dots$), akkor

$$|q_m| \leq \frac{1}{3} \max(|q_{m-1}|, |q_{m-3}|, |q_{m-4}|) \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{m-4}{4}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{m}{4}}.$$

Ha $n = 100$ -at behelyettesítünk, akkor

$$|q_{100}| = |p_{100} - a_1| = |p_{100} - 0,4| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{25} < 10^{-6},$$

vagyis

$$0,399\ 999 < p_{100} < 0,400\ 001.$$

Megjegyzések. 1. Ha d lapú dobókockával dobunk, azaz egyforma valószínűséggel lépünk $1, 2, \dots, d-1$ vagy d mezőt, akkor is megoldható a feladat. ($d = 6$ -ra a megoldás már megjelent a KöMaL 1994/8–9. számának 430–432. oldalán.)

Általánosításunk teljes egészében a fent ismertetett gondolatmenetet fogja követni.

Legyen p_n annak valószínűsége, hogy rálépünk az n -edik mezőre és legyen $p_0 = 1, p_{-1} = p_{-2} = \dots = p_{-d} = 0$.

Ekkor világos, hogy $n = 0, 1, \dots$ esetén

$$p_n = \sum_{i=1}^d \frac{1}{d} p_{n-i},$$

vagyis

$$p_n - \frac{1}{d}p_{n-1} - \frac{1}{d}p_{n-2} - \dots - \frac{1}{d}p_{n-d} = 0.$$

Most

$$p(x) = x^d - \frac{1}{d}x^{d-1} - \frac{1}{d}x^{d-2} - \dots - \frac{1}{d}.$$

Ennek egyik gyöke $z_1 = 1$, a többi gyök abszolút értéke 1-nél kisebb. A $z_1 = 1$ multiplicitása, $\alpha_1 = 1$, mert

$$p(x) = (x-1) \left(x^{d-1} + \frac{d-1}{d}x^{d-2} + \frac{d-2}{d}x^{d-3} + \dots + \frac{1}{d} \right),$$

és a második tényező $x = 1$ esetén pozitív.

A $q_n = p_n - a_1$ sorozatra teljesül, hogy

$$q_n + \frac{d-1}{d}q_{n-1} + \frac{d-2}{d}q_{n-2} + \dots + \frac{1}{d}q_{n-d} = 0,$$

azaz

$$(p_n - a_1) + \frac{d-1}{d}(p_{n-1} - a_1) + \frac{d-2}{d}(p_{n-2} - a_1) + \dots + \frac{1}{d}(p_{n-d} - a_1) = 0.$$

Behelyettesítve $n = 0$ -t,

$$(1 - a_1) + \frac{d-1}{d}(0 - a_1) + \frac{d-2}{d}(0 - a_1) + \dots + \frac{1}{d}(0 - a_1) = 0,$$

amiből

$$a_1 = \frac{1}{\frac{1}{d} + \frac{2}{d} + \dots + \frac{d}{d}} = \frac{2}{d+1}.$$

Tehát

$$\lim p_n = \frac{2}{d+1}.$$

A $|q_n|$ megbecsüléséhez:

$$\left(x - \frac{d-2}{d-1}\right) \left(x^{d-1} + \frac{d-1}{d}x^{d-2} + \frac{d-2}{d}x^{d-3} + \dots + \frac{1}{d}\right) =$$

$$= x^d + \frac{1}{d(d-1)}x^{d-1} - \frac{1}{d(d-1)}x^{d-3} - \frac{2}{d(d-1)}x^{d-4} - \dots - \frac{d-2}{d(d-1)},$$

amiből q_n -re

$$q_n + \frac{1}{d(d-1)}q_{n-1} - \frac{1}{d(d-1)}q_{n-3} - \frac{2}{d(d-1)}q_{n-4} - \dots - \frac{d-2}{d(d-1)}q_{n-d} = 0,$$

ahonnan

$$\begin{aligned} |q_n| &\leq \frac{1+1+2+\dots+(d-2)}{d(d-1)} \max(|q_{n-1}|, |q_{n-3}|, \dots, |q_{n-d}|) < \\ &< \left(1 - \frac{2d-4}{d(d-1)}\right) \max(|q_{n-1}|, |q_{n-3}|, \dots, |q_{n-d}|). \end{aligned}$$

Innen pedig

$$\left|p_n - \frac{2}{d+1}\right| = |q_n| \leq \left(1 - \frac{2d-4}{d(d-1)}\right)^{\frac{n}{d}}.$$

Ez a becslés 0-hoz tart $d \geq 3$ esetén. (Ha $d = 1$, akkor az állítás triviális. Ha $d = 2$, akkor $z_2 = -\frac{1}{2}$ és $|q_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.)

Farkas Péter (Budapest, Szent István Gimn., IV. o. t.)

2. A megoldásban felírt összefüggéseket a lineáris rekurzív sorozatok elméletére való hivatkozás nélkül is be lehet bizonyítani, többnyire teljes indukcióval.

Induljunk ki a (2) összefüggésből, ennek alapján bebizonyítjuk a

$$(7) \quad \left(p_n - \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{4}\left(p_{n-1} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(p_{n-2} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(p_{n-3} - \frac{2}{5}\right) = 0$$

azonosságot. Ez $n = 0$ -ra, mint láttuk, igaz. Ha pedig igaz $n = m - 1$ -re, akkor

$$\begin{aligned} &\left(p_m - \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{4}\left(p_{m-1} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(p_{m-2} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(p_{m-3} - \frac{2}{5}\right) = \\ &= \left(p_m - \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{4}\left(p_{m-1} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(p_{m-2} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(p_{m-3} - \frac{2}{5}\right) - \\ &\quad - \left(p_m - \frac{1}{4}p_{m-1} - \frac{1}{4}p_{m-2} - \frac{1}{4}p_{m-3} - \frac{1}{4}p_{m-4}\right) = \\ &= \left(p_{m-1} - \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{4}\left(p_{m-2} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(p_{m-3} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(p_{m-4} - \frac{2}{5}\right) = 0. \end{aligned}$$

Ezzel (7)-et igazoltuk. Írjuk fel (7)-et $n - 1$ -re is:

$$(8) \quad \left(p_{n-1} - \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{4}\left(p_{n-2} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(p_{n-3} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(p_{n-4} - \frac{2}{5}\right) = 0$$

Vonjuk ki (7)-ből (8) $\frac{2}{3}$ -szorosát:

$$\begin{aligned} &\left(p_n - \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{4}\left(p_{n-1} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(p_{n-2} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(p_{n-3} - \frac{2}{5}\right) - \\ &- \frac{2}{3}\left(p_{n-1} - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{2}\left(p_{n-2} - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{3}\left(p_{n-3} - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{6}\left(p_{n-4} - \frac{2}{5}\right) = \\ &\left(p_n - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{12}\left(p_{n-1} - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{12}\left(p_{n-3} - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{6}\left(p_{n-4} - \frac{2}{5}\right) = 0. \end{aligned}$$

Ezzel az összes szükséges azonosságot igazoltuk.

3. Tegyük fel, hogy a lehetséges lépéshosszok a $h_1 < \dots < h_d$ pozitív egészek, ezek valószínűsége $q_1, \dots, q_d > 0$. Legyen p_n továbbra is annak valószínűsége, hogy rálépünk az n -edik mezőre. Bebizonyítjuk, hogy ha a p_n sorozat konvergens, akkor határértéke

$$\lim p_n = \frac{1}{q_1 h_1 + q_2 h_2 + \dots + q_d h_d}.$$

(Azt nem nehéz bebizonyítani, hogy p_n akkor konvergens, ha a $h_1, \dots, h_d$ számoknak nincs 1-nél nagyobb közös osztója.)

Definiáljuk az $X_0, X_1, \dots$ véletlen mennyiségeket (valószínűségi változókat) a következőképpen:

$$X_n = 0, \text{ ha az}$$

n -edik mezőre nem lépünk; i , ha az n -edik mezőre lépünk, akkor i -edikként lépünk.

Ekkor $X_0 + X_1 + \dots + X_m$ az első m mezőn tett lépések összege, vagyis az első olyan mező sorszáma, amely az m -edik után van és rálépünk. Ez biztosan $m + 1$ és $m + h_d$ között van, tehát

$$m + 1 \leq X_0 + X_1 + \dots + X_m \leq m + h_d.$$

Ebből következik, hogy az összeg várható értéke is e két határ között van:

$$m + 1 \leq E(X_0 + X_1 + \dots + X_m) = E(X_0) + E(X_1) + \dots + E(X_m) \leq m + h_d.$$

(A várható értéket mindig lehet tagonként számolni.)

Mivel

$$E(X_n) = p_n q_1 \cdot h_1 + p_n q_2 \cdot h_2 + \dots + p_n q_d \cdot h_d = p_n (q_1 h_1 + \dots + q_d h_d),$$

ez azt jelenti, hogy

$$m + 1 \leq (p_0 + p_1 + \dots + p_m)(q_1 h_1 + \dots + q_d h_d) \leq m + h_d,$$

amit $(m + 1)(q_1 h_1 + \dots + q_d h_d)$ -vel osztva

$$\frac{1}{q_1 h_1 + \dots + q_d h_d} \leq \frac{p_0 + p_1 + \dots + p_m}{m + 1} \leq \left(1 + \frac{h_d - 1}{m + 1}\right) \frac{1}{q_1 h_1 + \dots + q_d h_d}.$$

Mivel $m \rightarrow \infty$ esetén

$$\left(1 + \frac{h_d - 1}{m + 1}\right) \rightarrow 1,$$

ebből következik, hogy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p_0 + p_1 + \dots + p_m}{m + 1} = \frac{1}{q_1 h_1 + \dots + q_d h_d}.$$

Ismeretes, hogy ha p_n konvergens, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_0 + p_1 + \dots + p_n}{n + 1}$ is konvergens és ugyanoda tart, ezért a (p_n) sorozat

határértéke csak $\frac{1}{q_1 h_1 + \dots + q_d h_d}$ lehet.

Pataki János, Duino (Olaszország)