

Függesszük fel először a háromszöget az A csúcsában rögzített fonálra. A h_a szakasz definíciójából következik, hogy $h_a \geq s_a$, ahol s_a az a oldalhoz tartozó súlyvonal. Az 1. ábrán a B és C csúcsoknak a fonáltól való távolsága BE , illetve CD . Használjuk az ábra további jelöléseit is, és tegyük fel, hogy $a < b < c$. Mivel az $AF = s_a$ súlyvonal felezi a háromszög területét, $BE = CD$, amit az ábrán x -szel jelöltünk. Feltettük, hogy $b < c$, ezért $x^2 + AD^2 = b^2 < c^2 = x^2 + AE^2$, tehát $AD < AE$. Ez azt jelenti, hogy ha az A -ból induló oldalak közül c a nagyobb, akkor

$$(1) \quad x^2 + h_a^2 = c^2.$$

Ha a háromszöget B -ben, majd C -ben függesztjük fel, és az x -nek megfelelő szerepű szakaszok y , illetve z , akkor hasonlóan kapjuk, hogy

$$(2) \quad y^2 + h_b^2 = c^2 \quad \text{és} \quad z^2 + h_c^2 = b^2.$$

Ismeretes, hogy a háromszög bármelyik súlyvonala hogyan fejezhető ki az oldalakkal, pl.

$$s_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

(lásd Geometriai feladatok gyűjteménye, II. 292. feladat). A súlyvonalakról szóló formulákból azonnal következik, hogy ha $a < b < c$, akkor $s_a > s_b > s_c$. Mivel a súlyvonalak felezik a háromszög területét, $t = s_a \cdot x = s_b \cdot y = s_c \cdot z$, és így

$$(3) \quad x < y < z.$$

Az (1) és (2) összefüggésből $h_a^2 = c^2 - x^2$, $h_b^2 = c^2 - y^2$, $h_c^2 = b^2 - z^2$, és ezekből (3) alapján $h_a > h_b > h_c$.

Rozmán András (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., III. o.t.)

Megjegyzés. A (2)-ben szereplő formulák származtatásakor előfordulhat, hogy a háromszöget a C csúcsában rögzített fonálra függesztve B magasabban lesz, mint C (2. ábra), de ez nem módosítja a megoldást.

