

I. megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Legyen a körszeletekbe írt körök területe t_1 , ill. t_2 . Thalész tétele szerint $x^2 + y^2 = r^2$. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 &= \pi (r_1^2 + r_2^2) = \\ &= \pi \left[\left(\frac{r-x}{2} \right)^2 + \left(\frac{r-y}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{\pi}{4} [2r^2 + x^2 + y^2 - 2r(x+y)] = \\ &= \frac{\pi}{4} [3r^2 - 2r(x+y)]. \end{aligned}$$

A számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$(1) \quad \frac{r}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2},$$

ezért

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} [3r^2 - 2r(x+y)] &\geq \\ &\geq \frac{\pi}{4} (3r^2 - 2r \cdot r\sqrt{2}) = \\ &= \frac{r^2 \cdot \pi}{4} (3 - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Ebből láthatjuk, hogy a területösszeg $\frac{r^2\pi}{4} (3 - 2\sqrt{2})$ -nél nem lehet kisebb. Ezt az értéket föl is veszi, ha $x = y$, azaz ha P felezi az AB ívet.

A háromszögegyenlőtlenség szerint $2x + 2y > 2r$ minden lehetséges P -re, ezért $t_1 + t_2$ -nek maximuma csak az elfajuló $2x + 2y = 2r$ esetben lehetne, amit a feladat szövege kizár. Maximum tehát nincs, csak legkisebb felső korlát:

$t_1 + t_2 < \frac{r^2\pi}{4}$. Az elfajuló esetben $r_1 = \frac{r}{2}$, $r_2 = 0$ vagy fordítva.

Farkas Péter (Budapest, Szent István Gimn., IV. o.t.) és *Lovász Zoltán* (Bonyhád, Perczel Mór Közg., Szki., IV. o.t.) dolgozatai alapján

II. megoldás. Vegyük figyelembe, hogy egy kör területe ugyanakkor a legnagyobb vagy legkisebb, amikor a kerülete. Ezért $k_1 + k_2 = \pi(r-x+r-y) = \pi(2r-(x+y))$ szélsőértékeit kereshetjük. A megoldást az (1) egyenlőtlenség alapján az I. megoldáshoz hasonlóan kapjuk.

Kardkovács Zsolt Tivadar (Budapest, Károlyi M. Gimn., IV. o.t.)

III. megoldás. Az *ábrán* az AP -vel párhuzamos e érintő és a BP -vel párhuzamos f érintő a Q pontban metszi egymást. Nyilván az $EQF \angle = 90^\circ$, tehát Q -ból az AB átmérőjű kör 90° -os szögben látszik. Ezért $QE = QF = r$ állandó, de akkor OQ is állandó. Az ábráról láthatjuk, hogy $PQ^2 = 4r_1^2 + 4r_2^2$, tehát PQ ugyanakkor minimális, amikor $t_1 + t_2$. Ez akkor és csak akkor következik be, ha P illeszkedik OQ -ra, vagyis ha P az AB ív felezőpontja. Hasonlóan látható, hogy PQ akkor (lenne) a legnagyobb, ha PQ érinti a kört, azaz $P = F$ vagy $P = E$, vagyis $AP = 0$ vagy $PB = 0$.

Megjegyzések. 1. Lovász Zoltán megmutatta, hogy a két beírt kör területének összege akkor is az egyenlő szárú háromszög esetén lesz minimális, ha AB helyett egy tetszőleges húrt veszünk.

2. Farkas Péter P helyett a $P_1, P_2, \dots, P_n$ pontokkal $n+1$ részre osztotta az AB félkörívet. Bebizonyította, hogy az így keletkezett $n+1$ körszeletbe írt maximális érintő körök területének összege akkor minimális, ha $AP_1 = P_1P_2 = \dots = P_nB$.

