

Először vizsgáljuk meg, hogy milyen lapjai lehetnek egy ötlapú testnek. A lapok között nem lehet ötszög vagy ötnél több oldalú sokszög, mert ha ilyen volna, akkor annak minden oldalához csatlakozna a testnek 1–1 lapja, a lapok száma tehát legalább $1 + 5 = 6$ lenne. Ezért minden lap háromszög vagy négyszög.

Jelöljük a háromszögek számát h -val, a négyszögek számát n -nel, a test éleinek számát e -vel, csúcsainak számát pedig c -vel. A test minden éle egyúttal két oldallapnak is oldaléle, ezért

$$2e = 3h + 4n.$$

Ebből következik, hogy a háromszöglapok száma $h = \frac{2e - 4n}{3} = 2 \cdot \frac{e - 2n}{3}$, ami biztosan páros, mert h egész. Tehát csak $h = 0, 2$ vagy 4 jön szóba, amiből sorra $n = 5, 3$ vagy 1 , így $e = 10, 9$ vagy 8 . A test minden csúcsában legalább 3 él találkozik, és minden élen pontosan 2 csúcs van, ezért $c \leq \frac{2}{3}e$. Vagyis az egyes esetekben a csúcsok száma legfeljebb 6, 6, illetve 5. Vizsgáljuk meg a három lehetőséget.

(i) A testnek 5 négyszöglapja, 10 éle és legfeljebb 6 csúcsa van. Ekkor $3c < 2e$, ezért van olyan csúcs, amelyben legalább 4 él, s ezért legalább 4 lap találkozik. Jelöljük ezt a csúcsot A -val (1. ábra). Az A -t tartalmazó egyik négyszög további csúcsai legyenek B, C és D . Az AB élt egy $ABCD$ -től különböző négyszöglap is tartalmazza, ennek további csúcsai legyenek E és F . E két csúcs nincs benne az $ABCD$ síkban, ezért az A, B, C, D, E és F pontok a testnek 6 különböző csúcsát alkotják. Mivel a testnek legfeljebb 6 csúcsa lehet, azért a testnek az A -ból kiinduló negyedik – azaz AB -től, AD -től és AF -től különböző – élén nem lehet további csúcs. Ez nyilvánvalóan ellentmondás, ezért ilyen test nem létezik.

(ii) $n = 3, h = 2$ és $e = 9$. Legyen $ABCD$ és $ABEF$ a test két szomszédos négyszöglapja (2. ábra). Mivel az öt lap közül három négyszög, azért ilyenek biztosan vannak. A testnek legfeljebb 6 csúcsa van, ezért nem lehet A, B, C, D, E, F -től különböző csúcsa. Ez azt jelenti, hogy a harmadik négyszöglap $CDEF$ kell legyen. Tehát a test két háromszöglapja egymással nem szomszédos, a négyszöglapok mindegyike pedig szomszédos a két másik négyszöggel és a két háromszöggel. Ezért a testnek 9 lapszöge van.

Megmutatjuk, hogy a lapszögek között legfeljebb 7 derékszög lehet. 7 derékszög található egy derékszögű háromszög alapú egyenes hasáb lapszögei között (3. ábra), mert a három oldallap az alapra is és a fedőlapra is merőleges, az oldallapok egymással bezárt szögei pedig megegyeznek az alapháromszög szögeivel, tehát ezek között pontosan egy derékszög van. A lapszögek között 7-nél több derékszög nem lehet, mert akkor volna olyan háromszöglap, amelyre mind a három hozzá csatlakozó négyszög merőleges lenne, továbbá a négyszögek közül is legalább két pár egymásra merőleges lenne. De ebben az esetben a négyszöglapok egymással bezárt szögei definíció szerint megegyeznek a háromszöglap szögeivel, amelyek között nem lehet két derékszög.

(iii) $n = 1, h = 4$ és $e = 8$. Ekkor a csúcsok száma 5, a test négyszög alapú gúla (4. ábra). Oldallapjai közül legfeljebb kettő lehet merőleges az alaplapra, mert ha három merőleges lenne, akkor azok metszésvonalai – amelyek a gúla oldalélei – egymással párhuzamosak lennének, hiszen merőlegesek volnának az alaplapra. Tehát a gúla 8 lapszöge közül legalább 2 nem derékszög, azaz a derékszögű lapszögek száma ebben az esetben kisebb, mint 7.

Ezzel beláttuk, hogy egy ötlapú test lapszögei közül legfeljebb 7 lehet derékszög.



