

Nyilvánvaló, hogy a görbének csak egy pontja van a koordinátatengelyeken, az  $O$  origó. Legyen  $P(x, y)$  a görbének egy olyan pontja, amelyik egyik koordinátatengelyen sincs rajta. Az  $OA$ -ra  $P$ -ből állított merőleges talppontja legyen  $T$ . Ekkor  $OT = |x|$  és  $PT = |y|$ .

Az  $OPT$ , a  $BOP$  és az  $OAP$  háromszögek hasonlóak, mert szögeik megegyeznek (mindhárom háromszög hasonló a  $BOA$  háromszöghöz is). Ezért megfelelő oldalai aránya is egyenlő:

$$\frac{OP}{PB} = \frac{PT}{OT} = \frac{|y|}{|x|} \quad \text{és} \quad \frac{OP}{AP} = \frac{OT}{PT} = \frac{|x|}{|y|}.$$

Ezekből az egyenlőségekből kapjuk, hogy

$$|x| \cdot OP = |y| \cdot PB \quad \text{és} \quad |y| \cdot OP = |x| \cdot AP.$$

Szorozzuk meg az első egyenlőséget  $|x|$ -kel, a másodikat  $|y|$ -kel, és ezután adjuk őket össze:

$$(x^2 + y^2) OP = |x \cdot y| \cdot (AP + PB).$$

Pitagorasz tétele szerint  $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; feltételeink szerint  $AP + PB = AB = 1$ , ezeket behelyettesítve:

$$(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} = |xy|.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$(1) \quad (x^2 + y^2)^3 = x^2 \cdot y^2.$$

Ezt az egyenletet az origó koordinátái is kielégítik, így megmutattuk, hogy a keresett görbének minden pontja rajta van az (1) egyenletű görbén.

Megmutatjuk, hogy ha egy  $Q$  pont koordinátái kielégítik az (1) egyenletet, akkor az  $AB$  szakasznak van olyan helyzete, amelynél az origóból  $AB$ -re bocsátott merőleges talppontja éppen  $Q$ . Ha  $Q$  egyik koordinátája 0, akkor (1) miatt a másik is 0, az origó pedig nyilván előáll talppontként, pl. akkor, amikor  $A(1;0)$  és  $B(0;0)$ . Ha  $Q(u;v)$ , ahol  $u \cdot v \neq 0$ , akkor legyen

$$A\left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}; 0\right) \quad \text{és} \quad B\left(0; \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right).$$

Ekkor  $AB$  hossza Pitagorasz tétele alapján 1, és könnyen látható, hogy  $OQ$  merőleges  $AB$ -re.

Ezzel megmutattuk, hogy a keresett görbe egyenlete

$$(x^2 + y^2)^3 = x^2 + y^2.$$

*Pap Gyula* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

