I. megoldás. Tetszőleges $k \geq 2$ egész számhoz konstruálunk olyan $P_k(x,y,z)$ polinomot, amelyre

$$P_k(t^k, t^{k+1}, t+t^{k+2}) = t. \tag{1}$$

Ez $k = 1993$ esetén bizonyítja az állítást.

Legyen

$$\begin{aligned} P_k(x,y,z) &= z - zy + zy^2 - \ldots + (-1)^{k-2}zy^{k-2} - (-1)^{k-2}x^k = \\ &= z\left(1 - y + y^2 - \ldots + (-1)^{k-2}y^{k-2}\right) - (-1)^{k-2}x^k; \end{aligned}$$

ekkor

$$\begin{aligned} &P_k(t^k, t^{k+1}, t+t^{k+2}) = \\ &\quad = t(1+t^{k+1})\left(1 - t^{k+1} + (t^{k+1})^2 - (t^{k+1})^3 + - \ldots + (-1)^{k-2}(t^{k+1})^{k-2}\right) - (-1)^{k-2}t^{k^2} = \\ &\quad = t\left(1 + (-1)^{k-2}(t^{k+1})^{k-1}\right) - (-1)^{k-2}t^{k^2} = t + (-1)^{k-2}t^{(k+1)(k-1)+1} - (-1)^{k-2}t^{k^2} = t. \end{aligned}$$

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., II. o.t.)

II. megoldás. Legyenek α, β, γ 1-nél nagyobb egészek, és legyenek α és β relatív prímek. Bebizonyítjuk, hogy létezik olyan $P(x,y,z)$ polinom, amelyre

$$P(t^\alpha, t^\beta, t+t^\gamma) = t.$$

Nevezzünk egy $f(t)$ polinomot előállíthatónak, ha létezik hozzá olyan $P_f(x,y,z)$ polinom, amelyre $P_f(t^\alpha, t^\beta, t+t^\gamma) = f(t)$ teljesül. A következőket állítjuk:

A) Ha $k \geq \alpha\beta$ egész szám, akkor t^k előállítható;

B) Ha k pozitív egész és t^{k+1}, t^{k+2}, t^{k+3}, $\ldots$ mindegyike előállítható, akkor t^k is előállítható.

Ezekből következik, hogy a t polinom is előállítható.

Az A) állítás bizonyítása. Megmutatjuk, hogy $k \geq \alpha\beta$ esetén léteznek olyan i, j nemnegatív egész számok, amelyekre $k = i\alpha + j\beta$. Ebből állításunk következik, mert $t^k = t^{i\alpha+j\beta} = (t^\alpha)^i(t^\beta)^j$, vagyis a $P(x,y,z) = x^iy^j$ polinom előállítja t^k-t.

Legyen tehát $k \geq \alpha\beta$ és tekintsük a $\beta, 2\beta, \ldots, \alpha\beta$ egészeket. Mivel α és β relatív prímek, ezek a számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo α. Ezért létezik egy olyan $1 \leq j \leq \alpha$ egész, amelyre $k \equiv j\beta \mod \alpha$, vagyis $k - j\beta$ osztható α-val; létezik egy olyan i egész szám, amelyre $k - j\beta = i\alpha$. Mivel $k \geq \alpha\beta$, $i\alpha = k - j\beta \geq 0$, tehát i nemnegatív.

(A gondolatmenet kis módosításával bizonyítható, hogy már $k \geq (\alpha-1)(\beta-1)$ esetén is mindig léteznek megfelelő i, j nemnegatív egészek.)

A B) állítás bizonyítása. A binomiális tétel szerint

$$(t+t^\gamma)^k = \binom{k}{0}t^k + \binom{k}{1}t^{k-1+\gamma} + \binom{k}{2}t^{k-2+2\gamma} + \ldots + \binom{k}{k}t^{k\gamma}.$$

Ebben a polinomban az első tag a kívánt t^k, a többi pedig mind legalább $k+\gamma-1 \geq (k+1)$-edfokú. Legyen minden $n \geq k$-ra $P_n(x,y,z)$ az a polinom, amely előállítja t^n-t; ekkor

$$t^k = (t+t^\gamma)^k - \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}P_{k-i+i\gamma}(t^\alpha, t^\beta, t+t^\gamma),$$

vagyis

$$P_k(x,y,z) = z^k - \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}P_{k-i+i\gamma}(x,y,z)$$

választással

$$P_k(t^\alpha, t^\beta, t+t^\gamma) = t^k.$$

Ezzel az A) és a B) állítást is igazoltuk.

Szádeczky-Kardoss Szabolcs (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján