

A három pont (P, Q, R) nem lehet mind egy oldalon az ABC háromszögben, mert akkor ez az oldal legalább a terület $\frac{2}{3}$ része lenne, s ez ellentmondana a háromszög-egyenlőtlenségnek.

Így két eset lehetséges.

1. *eset*: Az egyik oldalon két pont van, egy másikon pedig a harmadik. Legyen az AB oldalon a P és a Q , a BC oldalon az R pont (P és Q közül P van A -hoz közelebb) (1. ábra). Feltehetjük, hogy a terület 3 egység, vagyis $a + b + c = 3$. Ekkor $PQ = 1$ és $QB + BR = 1$. A háromszög-egyenlőtlenségből $c < 1,5$, $a < 1,5$. A PQR háromszög R -hez tartozó magasságát m_r -rel, az ABC háromszög C -hez tartozó magasságát m_c -vel jelölve: (BRR' és BCC' hasonlóságából)

$$\frac{T_{PQR}}{T_{ABC}} = \frac{1 \cdot m_r}{c \cdot m_c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{BR}{BC} = \frac{1}{c} \cdot \frac{BR}{a}.$$

De $BR = PQ - QB > PQ - (c - PQ) > 2PQ - 1,5 = 0,5$; így

$$\frac{T_{PQR}}{T_{ABC}} = \frac{1}{ca} \cdot BR > \frac{0,5}{1,5 \cdot 1,5} = \frac{2}{9}.$$

Itt a $\frac{2}{9}$ nem helyettesíthető nagyobb számmal, mert ha $AB = BC$ és AC -t elég kicsinek választjuk, P -t pedig A -ba vesszük, akkor

$$\frac{T_{PQR}}{T_{ABC}} = \frac{2 - c}{ac},$$

ami ha $a + b + c = 3$, akkor $a, c \rightarrow 1,5$, $b \rightarrow 0$ esetén tart $\frac{2}{9}$ -hez. Ez azt jelenti, hogy ekkor a $\frac{2}{9}$ éles becslés.

2. *eset*: Mindhárom pont különböző oldalon van (2. ábra). Könnyen láthatóan

$$\frac{T_{PQR}}{T_{ABC}} = 1 - \left(\frac{BQ}{BC} \cdot \frac{BP}{BA} + \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AR}{AC} + \frac{CR}{CA} \cdot \frac{CQ}{CB} \right).$$

A kivonandóról (jelöljük M -mel) szeretnénk belátni, hogy legfeljebb $\frac{7}{9}$. Tegyük fel, hogy $a + b + c = 3$, és jelöljük x -szel az $\frac{AP}{AB}$ arányt. x segítségével a többi arányt is kifejezzük. Ekkor

$$\frac{AP}{AB} \cdot \frac{AR}{AC} = x \cdot \frac{1 - xc}{b} = -\frac{c}{b}x^2 + \frac{1}{b}x, \quad \frac{BQ}{BC} \cdot \frac{BP}{BA} = \frac{1 - (1 - x) \cdot c}{a} \cdot (1 - x) = -\frac{c}{a}x^2 + \frac{2c - 1}{a}x + \frac{1 - c}{a}, \quad \frac{CQ}{CB} \cdot \frac{CR}{CA} = \frac{a + (1 - x)c}{a}$$

Közös nevezőre hozva:

$$M = -\frac{3c}{ab}x^2 + \frac{3c + a - b}{ab}x + \frac{ab + b - 2}{ab}.$$

Ennek a másodfokú kifejezésnek maximumhelye van, arról szeretnénk belátni, hogy $\frac{7}{9}$ -nél kisebb. A maximum értékét adó $-\frac{\Delta}{4A}$ (Δ a diszkrimináns) képlet felhasználásával:

$$M_{\max} = \frac{9c^2 + a^2 + b^2 + 6ac + 6bc - 2ab + 12abc - 24c}{12abc}.$$

Bizonyítandó: $M_{\max} < \frac{7}{9}$.

Beszorzás és rendezés után:

$$27c^2 + 3a^2 + 3b^2 + 18ac + 18bc - 6ab - 72c + 8abc < 0.$$

Most minden tagból harmadfokút „gyártunk” $a + b + c = 3$ és $(a + b + c)^2 = 9$ felhasználásával:

$$\begin{aligned} & (9c^3 + 9c^2a + 9c^2b) + (a^3 + a^2b + a^2c) + (b^3 + b^2a + b^2c) + \\ & + (6a^2c + 6abc + 6ac^2) + (6b^2c + 6bc^2 + 6abc) + (-2abc - 2a^2b - 2ab^2) + \\ & + (-8a^2c - 8b^2c - 8c^3 - 16abc - 16ac^2 - 16bc^2) + 8abc = \\ & = a^3 + b^3 + c^3 - ac^2 - bc^2 - a^2c - b^2c - a^2b - ab^2 + 2abc = \\ & = (a - b - c)(b - c - a)(c - a - b) < 0. \end{aligned}$$

Mivel csak ekvivalens átalakítást végeztünk,

$$M \leq M_{\max} < \frac{7}{9}, \quad \text{s így} \quad \frac{T_{PQR}}{T_{ABC}} > \frac{2}{9}.$$

Ezt kellett igazolni.

Megjegyzés. A második esetben is megközelíthető a $\frac{2}{9}$. Legyen $AB = BC$ és $AP = 2PB$. Ha $\angle CBA \rightarrow 0$, akkor

CQ $\xrightarrow{CB \rightarrow \frac{2}{3}}$, $\frac{AR}{AC} = \frac{1}{3}$, s így $\frac{T_{PQR}}{T_{ABC}} \rightarrow \frac{2}{9}$. *Burcsi Péter* (Pápa, Türr István Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján