

Jelöljük tetszőleges a, b egész számokra $m(a, b)$ -vel az

$$(3) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_5 = a; x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_5^3 = b$$

egyenletrendszer megoldásainak számát az 1000-nél nem nagyobb abszolút értékű egészek körében. Nyilván $m(a, b) = 0$, ha $|a| > 5000$ vagy $|b| > 5 \cdot 10^9$.

A (3) egyenletrendszer megoldásait összepárosíthatjuk az

$$(4) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_5 = -a; x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_5^3 = -b$$

egyenletrendszerével, ha x_i helyére mindenhol $-x_i$ -t írunk, ezért $m(a, b) = m(-a, -b)$ mindig teljesül.

Csoportosítsuk (1) megoldásait aszerint, hogy $x_1 + \dots + x_5$ és $x_1^3 + \dots + x_5^3$ értéke mennyi. Ha $x_1 + \dots + x_5 = a$ és $x_1^3 + \dots + x_5^3 = b$, akkor $x_6 + \dots + x_{10} = -a$ és $x_6^3 + \dots + x_{10}^3 = -b$, és az ilyen esetek száma $m(a, b)m(-a, -b) = m^2(a, b)$. Ha ezt minden lehetséges a, b számpárra összegezzük, megkapjuk (1) megoldásainak számát:

$$(5) \quad M_1 = \sum_{|a| \leq 5000} \sum_{|b| \leq 5 \cdot 10^9} m(a, b)m(-a, -b) = \sum_{|a| \leq 5000} \sum_{|b| \leq 5 \cdot 10^9} m^2(a, b).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy (2) megoldásainak száma

$$(6) \quad M_2 = \sum_{|a| \leq 5000} \sum_{|b| \leq 5 \cdot 10^9} m(a, b)m(1-a, 1-b) = \sum_{|a| \leq 5000} \sum_{|b| \leq 5 \cdot 10^9} m(a, b)m(a-1, b-1).$$

Alkalmazzuk az $uv \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ egyenlőtlenséget (6) minden tagjára. (Ez az egyenlőtlenség minden valós számpárra teljesül és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $u = v$.)

$$\begin{aligned} M_2 &= \sum_{|a| \leq 5000} \sum_{|b| \leq 5 \cdot 10^9} m(a, b)m(a-1, b-1) \leq \\ &\leq \sum_{|a| \leq 5000} \sum_{|b| \leq 5 \cdot 10^9} \frac{1}{2}(m^2(a, b) + m^2(a-1, b-1)) \leq \sum_{|a| \leq 5001} \sum_{|b| \leq 5 \cdot 10^9 + 1} m^2(a, b) = M_1. \end{aligned}$$

Tehát $M_2 \leq M_1$. Egyenlőség csak akkor állhatna, ha minden a, b számpárra $m(a, b) = m(a-1, b-1)$ lenne. Ez azonban nem igaz, mert például $m(5001, 5 \cdot 10^9 + 1) = 0$ és $m(5000, 5 \cdot 10^9) = 1$. (Az egyetlen eset, amikor $x_1 + \dots + x_5 = 5000$ és $x_1^3 + \dots + x_5^3 = 5 \cdot 10^9$, ha $x_1 = \dots = x_5 = 1000$.)

Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Többen, érdemleges indoklás nélkül, azt állították, hogy (1)-nek csak olyan megoldásai vannak, amelyekben az x_i -k páronként ellentettek, illetve (2) megoldásaiban az x_i -k közül az egyik 0, egy másik 1, a többi pedig páronként ellentettje egymásnak. (Ezeket nevezhetjük „triviális” megoldásoknak.)

Ez a sejtés nem igaz. Például (1) egy nem triviális megoldása $x_1 = -16, x_2 = 13, x_3 = 12, x_4 = 10, x_5 = -8, x_6 = -7, x_7 = 5, x_8 = -4, x_9 = -3, x_{10} = -2$; a (2) egyenletrendszer egy nem triviális megoldása $x_1 = -12, x_2 = 11, x_3 = 10, x_4 = -9, x_5 = 8, x_6 = -7, x_7 = -5, x_8 = 4, x_9 = 3, x_{10} = -2$.

2. A megoldás elmondható akkor is, ha (2)-ben a két konstans másra cseréljük. Ez azt jelenti, hogy az

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = c; x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{10}^3 = d$$

egyenletrendszernek $c = d = 0$ esetén van a legtöbb megoldása.

Ez az eredmény lehetőséget ad M_1 alsó becslésére is.