

Ha $A = 0$, akkor a sorozat definíciója értelmetlen. Ha $A > 0$, akkor a sorozat minden eleme pozitív (x_1 pozitív, és a rekurzió alapján x_n pozitivitásából következik x_{n+1} pozitivitása is). Ha $A < 0$, akkor a sorozat minden eleme negatív. Ezekben az esetekben tehát a rekurzió értelmes.

Az esetszétválasztások elkerülése érdekében legyen $y_n = \frac{x_n}{\sqrt[3]{A}}$. A kérdés az, hogy az (y_n) sorozat tetszőleges pontossággal megközelíti-e az 1-et (azaz $y_n \rightarrow 1$).

Azt állítjuk, hogy az (y_n) sorozatra a következő rekurzió teljesül:

$$(2) \quad y_1 = |A|^{\frac{2}{3}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n + \frac{1}{y_n^2}}{2}.$$

Az első állítás egyszerűen következik y_1 definíciójából. A másodikhoz írunk (1)-ben x_n helyére $\sqrt[3]{A}y_n$ -et, y_{n+1} helyére $\sqrt[3]{A}x_{n+1}$ -et:

$$\sqrt[3]{A}y_{n+1} = \frac{\sqrt[3]{A}y_n + \frac{A}{(\sqrt[3]{A}y_n)^2}}{2}.$$

Ezt $\sqrt[3]{A}$ -val osztva éppen (2)-t kapjuk. (Észrevehető, hogy a feladatot tulajdonképpen az $A = 1$ esetre vezettük vissza.)

Mielőtt a konvergencia bizonyításához hozzáfekszünk, először az (y_n) sorozat elemeire bizonyítunk két becslést.

I. Az (y_n) sorozat minden eleme pozitív. Ez következik az első elem pozitív voltából.

II. Ha $n \geq 2$, akkor $y_n > \frac{9}{10}$. A rekurzió, valamint a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján ugyanis

$$y_n = \frac{y_{n-1} + \frac{1}{y_{n-1}^2}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{y_{n-1}}{2} + \frac{y_{n-1}}{2} + \frac{1}{y_{n-1}^2}}{3} \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{y_{n-1}}{2} \cdot \frac{y_{n-1}}{2} \cdot \frac{1}{y_{n-1}^2}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{4}} > \frac{9}{10}.$$

Vizsgáljuk meg, mi az összefüggés y_n és y_{n+1} 1-től való távolsága között. A rekurzió alapján

$$\begin{aligned} |y_{n+1} - 1| &= \left| \frac{y_n + \frac{1}{y_n^2}}{2} - 1 \right| = \left| \frac{y_n^3 - 2y_n^2 + 1}{2y_n^2} \right| = \left| \frac{y_n^2 - y_n - 1}{2y_n^2} \right| \cdot |y_n - 1| = \\ &= \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_n^2} \right| \cdot |y_n - 1| = \frac{1}{2} \left| \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{y_n} + \frac{1}{2} \right)^2 \right| \cdot |y_n - 1|. \end{aligned}$$

Ha $n \geq 2$, akkor $y_n > \frac{9}{10}$, ezért $0 < \frac{1}{y_n} < \frac{10}{9}$ és

$$\frac{5}{4} \geq \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{y_n} + \frac{1}{2} \right)^2 > \frac{5}{4} - \left(\frac{10}{9} + \frac{1}{2} \right)^2 > -\frac{3}{2}.$$

Mindezek alapján pedig

$$\begin{aligned} \left| \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{y_n} + \frac{1}{2} \right)^2 \right| &< \frac{3}{2}, \\ |y_{n+1} - 1| &< \frac{3}{4} |y_n - 1|. \end{aligned}$$

Ebből az eredményből teljes indukcióval azonnal bebizonyítható, hogy $n > 2$ esetén

$$|y_n - 1| < |y_2 - 1| \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{n-2}.$$

A jobb oldalon álló mértani sorozat 0-hoz tart, mert a hányadosa 1-nél kisebb abszolút értékű, következésképpen $y_n - 1$ is 0-hoz tart, y_n 1-hez, végül x_n $\sqrt[3]{A}$ -hoz tart.

Az (x_n) sorozat tehát $\sqrt[3]{A}$ -hoz tart minden olyan esetben, amikor $A \neq 0$.

Braun Gábor (Budapest, Szent István Gimn., II. o.t.)

Megjegyzések. 1. Ha y már „közel” van az 1-hez, akkor a hiba minden lépésnél körülbelül a felére csökken, mert $\left| 1 - \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_n^2} \right|$ értéke is körülbelül 1. Ez a „sebesség” még mindig sokkal kisebb, mint a négyzetgyökvonáshoz használt rekurzió sebessége, ahol (kis hiba esetén) a hiba minden lépésben körülbelül az előző hiba négyzetének (!) felére csökken. Ez azt is jelenti, hogy a sorozat következő tagjának legalább kétszer annyi helyes jegye van.

2. Ha k -adik gyököt ($k \geq 4$) akarnánk vonni az

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}}}{2}$$

rekurzióval, érdekes eredményre jutnánk. Ez a sorozat ugyanis $k = 4$ -re még konvergens (bár a konvergencia nagyon lassú), $k > 4$ esetén azonban már mindig divergens, kivéve azt az esetet, amikor $x_1 = \sqrt[k]{A}$.

3. Tegyük fel, hogy $x = \sqrt[3]{A} + \varepsilon$ és ε „kicsi” abszolút értékű. Ekkor

$$\frac{A}{x^2} = \frac{A}{(\sqrt[3]{A} + \varepsilon)^2} = \frac{A(\sqrt[3]{A} - \varepsilon)^2}{(\sqrt[3]{A}^2 - \varepsilon^2)^2} \approx \frac{A(\sqrt[3]{A}^2 - 2\varepsilon\sqrt[3]{A})}{\sqrt[3]{A}^4} = \sqrt[3]{A} - 2\varepsilon.$$

($A \approx$ jel azt jelenti, hogy a két mennyiség különbsége sokkal kisebb, mint ε .) A kapott közelítéshez $2x = 2\sqrt[3]{A} + 2\varepsilon$ -t hozzáadva, majd ebből $\sqrt[3]{A}$ -t kifejezve:

$$\sqrt[3]{A} \approx \frac{2x + \frac{A}{x^2}}{3}.$$

Ez az eredmény azt mutatja, hogy inkább érdemes az

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + \frac{A}{x_n^2}}{3}$$

rekurziót használni.

Be lehet bizonyítani, hogy az így felírt sorozat $\sqrt[3]{A}$ -hoz tart, és a helyes jegyek száma minden iterációnál megduplázódik.

A két sorozat konvergencia-sebessége közötti különbség szemléltetésére álljanak itt azok az értékek, amelyeket $A = 8$ köbgyökének becslésére adnak:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{A}{x_n^2}}{2} x_{n+1} = \frac{2x_n + \frac{A}{x_n^2}}{3} n = 18.0000000008.000000000n = 24.0625000005.375000000n = 32.2736168643.675635479n = 4.$$

4. Általában k -adik gyökvonásra használható az

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}}}{k}$$

rekurzió.

Ennek a rekurziónak megvan az a jó tulajdonsága, hogy a sorozat elemei a második elemtől kezdve nagyobbak $\sqrt[k]{A}$ -nál, monoton fogynak, a helyes jegyek száma minden lépésben körülbelül megduplázódik.