

I. megoldás. Ha $n = 0$, akkor ki kell kötnünk, hogy a és b egyike sem lehet 0, mert a 0^0 hatványt nem értelmezzük. A $2a + 3b = 12$ egyenletet 6-tal osztva kapjuk, hogy

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2.$$

Legyen $\frac{a}{3} = 1 + x$, ahol x megfelelő valós szám; ekkor $\frac{b}{2} = 2 - \frac{a}{3} = 1 - x$, az igazolandó állítás pedig

$$(1 + x)^n + (1 - x)^n \geq 2.$$

Fejtsük ki a bal oldal tagjait a binomiális tétel szerint:

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots + \binom{n}{n}x^n;$$

$$(1 - x)^n = 1 - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \binom{n}{3}x^3 + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}x^n.$$

Ezek összegében csak a páros kitevőjű tagok maradnak meg, azok is pozitív előjellel:

$$(2) \quad (1 + x)^n + (1 - x)^n = 2 + 2\binom{n}{2}x^2 + 2\binom{n}{4}x^4 + \dots + 2\binom{n}{2[n/2]}x^{2[n/2]}.$$

Ha $n < 2$, akkor ennek az összegnek csak egy tagja van, a 2. Ilyenkor tehát (2)-ben egyenlőség áll. Ha $n \geq 2$, akkor legalább még egy tagja van az összegnek. Mivel ezek a tagok mind nemnegatívak, az összeg legalább 2. Egyenlőség akkor van, ha $x = 0$, azaz $a = 3$ és $b = 2$.

II. megoldás. Ha $n = 0$, akkor az állítás triviális, feltéve, hogy $a \neq 0$ és $b \neq 0$. A továbbiakban feltesszük, hogy $n \geq 1$.

Legyen $x = \frac{a}{3}$ és $y = \frac{b}{2}$. A feltételt 6-tal osztva kapjuk, hogy $x + y = 2$, a bizonyítandó állítás pedig: $x^n + y^n \geq 2$. Mivel x és y szerepe felcserélhető, feltehetjük, hogy $x \leq y$. Azt állítjuk, hogy minden k természetes szám esetén $x^k \leq y^k$. Ez azért igaz, mert $y \geq x = 2 - y > -y$ miatt $|x| \leq y$.

Ebből következik, hogy

$$1 + y + y^2 + \dots + y^{n-1} \geq 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}.$$

Az $x + y = 2$ feltétel miatt $y - 1 = 1 - x$ és $y \geq x$ miatt $y - 1$ nemnegatív. Ezért a fenti egyenlőtlenség igaz marad, ha a bal oldalt $(y - 1)$ -gyel, a jobb oldalt $(1 - x)$ -szel szorozzuk:

$$(y - 1)(1 + y + y^2 + \dots + y^{n-1}) \geq (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}).$$

A beszorzásokat elvégezve $y^n - 1 \geq 1 - x^n$ adódik, ahonnan $x^n + y^n \geq 2$. Ezt kellett bizonyítani.

Frenkel Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.)

Megjegyzés. Többen próbálták alkalmazni a számtani és az n -edik hatványközép közötti egyenlőtlenséget az $\frac{a}{3}$ és $\frac{b}{2}$ számokra:

$$\frac{x + y}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{x^n + y^n}{2}}, \quad \text{ha } x, y \geq 0.$$

Azt az esetet azonban, amikor a vagy b negatív, többnyire nem vizsgálták meg. Az ilyen dolgozatok 2 pontot kaptak.