

I. megoldás. A két szorzatot csoportosítsuk a következő módon:

$$(200 \cdot 199) \cdot 198!, \quad \text{illetve} \quad 100^3 \cdot 100^{197}.$$

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint

$$\sqrt[197]{198!} = \sqrt[197]{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 198} < \frac{2 + 3 + \dots + 198}{197} = \frac{200 \cdot 197}{197 \cdot 2} = 100,$$

azaz $198! < 100^{197}$. A zárójelben levő szorzat pedig

$$200 \cdot 199 = 39\,800 < 1\,000\,000 = 100^3,$$

valószínűleg a két egyenlőtlenség összeszorozva (minden tényező pozitív)

$$200! < 100^{200}$$

adódik.

Kőműves Balázs (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Általánosabban, $(2n)!$ -t és n^{2n} -t hasonlítjuk össze. Mindkét kifejezés $2n$ tényezős szorzat. Az $n = 1, 2$ esetekben látható, hogy $(2n)! > n^{2n}$. Legyen $n \geq 3$. Vizsgáljuk meg az $\frac{n^{2n}}{(2n)!}$ törtet. Bontsuk föl $2n - 1$ tört szorzatára:

$$\left(\frac{n}{1}\right) \cdot \left(\frac{n}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{n}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{n}{2n-2}\right) \cdot \left(\frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n}{2n}\right).$$

Az első $n - 1$ tört nagyobb 1-nél, az n -edik éppen 1, a többi pedig kisebb 1-nél. Állítsuk ezeket párba:

$$\frac{n}{1} \text{ és } \left(\frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1}\right), \quad \frac{n}{2} \text{ és } \frac{n}{2n-2}, \quad \dots \quad \frac{n}{n-1} \text{ és } \frac{n}{2n-(n-1)},$$

végül $\frac{n}{n}$ pár nélkül. Felírva a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget k -ra és $(2n - k)$ -ra ($2 \leq k \leq n - 1$):

$$k(2n - k) < \left(\frac{k + 2n - k}{2}\right)^2 = n^2,$$

azaz $\frac{n}{k} \cdot \frac{n}{2n - k} > 1$. Tehát az első kivéve minden párban a tényezők szorzata 1-nél nagyobb. Vizsgáljuk külön a kimaradó első párt: nézzük meg, hogy milyen n -re lesz tényezőinek szorzata 1-nél nagyobb. Ekvivalens átalakításokat végezve (felhasználva persze, hogy $n \geq 3$)

$$n^3 \geq 2n(2n - 1)n^2 \geq 4n - 2n^2 - 4n + 4 \geq 2(n - 2)^2 \geq 2n - 2 \geq \sqrt{2}n \geq \sqrt{2} + 2 \approx 3,41.$$

Ha tehát $n \geq 4$, akkor minden pár szorzata 1-nél nagyobb, és így $n^{2n} > (2n)!$. Az $n = 3$ esetben pedig $3^6 = 729 > 720 = 6!$, azaz minden $n \geq 3$ egészre

$$n^{2n} > (2n)!.$$

Katona Zsolt (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján