

Jelöljük a és b legnagyobb közös osztóját A -val, és legyen $a = a_1 \cdot A$, $b = b_1 \cdot A$. Ekkor a legkisebb közös többszörös $A \cdot a_1 \cdot b_1$, amiről meggyőződhetünk a számok prímtényezős alakját vizsgálva: ha $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r}$ ($\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$), akkor

$$A = (a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \dots \cdot p_r^{\min(\alpha_r, \beta_r)}, \quad [a, b] = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \dots \cdot p_r^{\max(\alpha_r, \beta_r)},$$

$$a_1 = p_1^{\alpha_1 - \min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r - \min(\alpha_r, \beta_r)}, \quad b_1 = p_1^{\beta_1 - \min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r - \min(\alpha_r, \beta_r)},$$

azaz

$$A \cdot a_1 \cdot b_1 = p_1^{\alpha_1 + \beta_1 - \min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r + \beta_r - \min(\alpha_r, \beta_r)} = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot \dots \cdot p_r^{\max(\alpha_r, \beta_r)},$$

hiszen tetszőleges α , β esetén $\alpha + \beta - \min(\alpha, \beta) = \max(\alpha, \beta)$.

Az előbbieket az egyenletbe helyettesítve és azt átalakítva:

$$A \cdot a_1 \cdot b_1 + A + A \cdot a_1 + A \cdot b_1 = Aa_1 \cdot Ab_1, A \cdot (a_1b_1 + a_1 + b_1 + 1) = A \cdot (Aa_1b_1), A(a_1 + 1)(b_1 + 1) = A(Aa_1b_1).$$

Vizsgáljuk meg először az $A = 0$ esetet. Ha $a \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor $A \neq 0$, így a és b közül valamelyik biztosan nulla. Definíció szerint $(a, 0) = a$, ha $a \neq 0$, vagyis egyedül az $a = b = 0$ eset marad. A $(0, 0)$ számot nem szokás értelmezni; ha mégis megteesszük, akkor $(0, 0) = 0$ esetén az $a = b = 0$ számpár megoldás, míg $(0, 0) \neq 0$ esetén nem. Más kérdés, hogy a 0-t nem mindig tekintik természetes számnak; mindenestre sem az $a = b = 0$ hiánya, sem a megléte nem befolyásolja a megoldás további (és egyben lényegi) részét (sem pedig a pontozást).

Feltehetjük tehát, hogy $A \neq 0$, és ekkor egyszerűsíthetünk vele:

$$(1) \quad (a_1 + 1)(b_1 + 1) = Aa_1b_1.$$

Látható, hogy az $a_1 = 0$, illetve $b_1 = 0$ esetek nem adnak megoldást, így megengedett a következő átrendezés:

$$A = \frac{a_1 + 1}{a_1} \cdot \frac{b_1 + 1}{b_1}.$$

Mivel $1 \leq a_1$ és $1 \leq b_1$, azért

$$1 < \frac{a_1 + 1}{a_1} \leq 2, \quad 1 < \frac{b_1 + 1}{b_1} \leq 2;$$

ennek alapján csak $A = 2; 3; 4$ lehetséges.

1. eset: $A = 2$. Ekkor (1)-et átrendezve

$$a_1b_1 + a_1 + b_1 + 1 = 2a_1b_1,$$

majd 2-t mindkét oldalhoz hozzáadva,

$$2 = a_1b_1 - a_1 - b_1 + 1 = (a_1 - 1)(b_1 - 1).$$

Ez csak úgy lehet, ha $a_1 - 1 = 1$ és $b_1 - 1 = 2$, vagy fordítva. Az előbbi esetén $a_1 = 2$, $b_1 = 3$, azaz $a = 4$, $b = 6$; míg a másíknál $a = 6$, $b = 4$.

2. eset: $A = 3$. Most (1)-ből

$$\begin{aligned} 3a_1b_1 &= a_1b_1 + a_1 + b_1 + 1, \\ 2a_1b_1 - a_1 - b_1 - 1 &= 0, \\ 4a_1b_1 - 2a_1 - 2b_1 - 2 &= 0, \\ (2a_1 - 1)(2b_1 - 1) &= 3. \end{aligned}$$

Ekkor szükségképpen $2a_1 - 1 = 3$ és $2b_1 - 1 = 1$, vagy fordítva, amiből $a = 6$, $b = 3$, illetve $a = 3$, $b = 6$ adódik.

3. eset: $A = 4$. Ekkor

$$\begin{aligned} 4a_1b_1 &= a_1b_1 + a_1 + b_1 + 1, \\ 3a_1b_1 - a_1 - b_1 - 1 &= 0, \\ 9a_1b_1 - 3a_1 - 3b_1 - 3 &= 0, \\ (3a_1 - 1)(3b_1 - 1) &= 4. \end{aligned}$$

Mivel $3a_1 - 1 = 4$ és $3b_1 - 1 = 1$ nem lehetséges, így $3a_1 - 1 = 3b_1 - 1 = 2$, amiből $a = b = 4$.

Öt számpárt találtunk, s könnyen ellenőrizhető, hogy ezek mindegyike valóban jó is; a megoldások tehát:

$$(3; 6), \quad (4; 6), \quad (4; 4), \quad (6; 4), \quad (6; 3).$$