

Tudjuk, hogy egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, ezért  $\alpha - \beta$  és  $a - b$  ugyanolyan előjelű, tehát  $(\alpha - \beta)(a - b) \geq 0$ . Ugyanígy kapjuk, hogy  $(\beta - \gamma)(b - c) \geq 0$  és  $(\gamma - \alpha)(c - a) \geq 0$ . A három egyenlőtlenséget összeadva és rendezve:

$$(2\alpha - \beta - \gamma)a + (2\beta - \alpha - \gamma)b + (2\gamma - \alpha - \beta)c \geq 0.$$

Felhasználva, hogy  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , kapjuk, hogy

$$(3\alpha - \pi)a + (3\beta - \pi)b + (3\gamma - \pi)c \geq 0.$$

Ebből átrendezéssel és  $3(a + b + c)$ -vel való osztással kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenség egyik felét:

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c}.$$

A másik egyenlőtlenség bizonyításához azt használjuk fel, hogy a háromszög két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál. Ezért

$$\alpha(b + c - a) + \beta(a + c - b) + \gamma(a + b - c) > 0.$$

Rendezve és ismét használva, hogy  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ :

$$a(\pi - 2\alpha) + b(\pi - 2\beta) + c(\pi - 2\gamma) > 0.$$

Ebből adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség másik fele:

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$

*Kucsera Judit* (Komárom, Szlovákia, Selye J. Gimn., III. o.t.)