

Az $f(n) = n$ függvény nyilván kielégíti a feladat feltételét. Bebizonyítjuk, hogy ez az egyetlen ilyen.

Az $f(n^2 + m^2) = f^2(n) + f^2(m)$ függvényegyenletbe $n = m = 0$ -t helyettesítve $f(0) = 2f^2(0)$ -t kapunk, aminek az egyetlen egész megoldása az $f(0) = 0$. Ezek után $n = 0$, $m = 1$ helyettesítéssel $f(1) = f^2(1)$ adódik, így az $f(1) > 0$ feltételt felhasználva csak $f(1) = 1$ lehet. Most rendre behelyettesítve az $(1; 1)$, $(0; 2)$, $(1; 2)$, $(0; 5)$, $(3; 4)$, $(1; 3)$, $(0; 10)$, $(2; 2)$, $(6; 8)$ számpárokat és megkeresve az egyes függvényegyenletek nemnegatív egész megoldását, $f(2) = 2$, $f(4) = 4$, $f(5) = 5$, $f(25) = 25$, $f(3) = 3$, $f(10) = 10$, $f(100) = 100$, $f(8) = 8$, végül $f(6) = 6$ -ot kapunk. Tehát $0 \leq n \leq 6$ esetén $f(n) = n$ valóban teljesül.

Teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az n -nél kisebb egész számokra már bebizonyítottuk az állítást. Nyilván elég az $n > 6$ esettel foglalkozni. Két lehetőség van aszerint, hogy az n páros vagy páratlan. Ha páros, akkor $n = 2k$ alakba írható, ahol k pozitív egész. A $(2k)^2 + (k - 5)^2 = (k + 3)^2 + (2k - 4)^2$ azonosság alapján

$$f^2(2k) + f^2(|k - 5|) = f((2k)^2 + (k - 5)^2) = f((k + 3)^2 + (2k - 4)^2) = f^2(k + 3) + f^2(|2k - 4|),$$

így

$$f^2(n) = f^2(2k) = f^2(k + 3) + f^2(|2k - 4|) - f^2(|k - 5|).$$

Mivel $n > 6$ és páros, azért $n \geq 8$, azaz $k \geq 4$. Ekkor $k + 3$, $|2k - 4|$, $|k - 5|$ kisebb $2k$ -nél, így az indukciós feltevés alapján

$$f^2(n) = (k + 3)^2 + (2k - 4)^2 - (k - 5)^2 = (2k)^2 = n^2,$$

tehát $f(n) = n$.

Hasonló módon, ha n páratlan, akkor $n = 2k + 1$. Itt a

$$(2k + 1)^2 + (k - 2)^2 = (k + 2)^2 + (2k - 1)^2$$

azonosságban $|k - 2|$, $|k + 2|$, $|2k - 1|$ kisebb $2k + 1$ -nél, ezért

$$\begin{aligned} f^2(n) &= f^2(2k + 1) = f^2(|k + 2|) + f^2(|2k - 1|) - f^2(|k - 2|) = \\ &= (k + 2)^2 + (2k - 1)^2 - (k - 2)^2 = (2k + 1)^2 = n^2, \end{aligned}$$

így $f(n) = n$.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.