I. megoldás. Legyenek n páratlan prímosztói: $q_1 < \cdots < q_s$; ha az n 2-hatvány, akkor $s = 0$. Jelölje t a legnagyobb olyan egész számot, amelyre

$$2^t \mid (q_1 - 1) \cdot \cdots \cdot (q_s - 1).$$

A φ függvény értékét szolgáltató képlet szerint ekkor

$$2^t \mid (q_1 - 1) \cdot \cdots \cdot (q_s - 1) \mid \varphi(n),$$

a q_i prímek páratlan volta miatt pedig $t \geq s$. Így

$$2^{2^t} - 1 \mid 2^{\varphi(n)} - 1,$$

és itt a bal oldalon álló osztó az egymáshoz páronként relatív prím $2^{2^0} + 1$, $2^{2^1} + 1, \ldots, 2^{2^{t-1}} + 1$ (páratlan) számok szorzata.

Ha $t > s$, akkor az előbbi t darab szám között van olyan, amelyik relatív prím n-hez.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $t = s$; ekkor mindegyik q_i 4-gyel osztva 3-at ad maradékul. Tételezzük fel továbbá, hogy, a feladat állításával ellentétben, $2^{\varphi(n)} - 1$ minden prímosztója a q_i prímek közül kerül ki. Ekkor szükségképpen $q_i = 2^{2^{i-1}} + 1$ $(1 \leq i \leq s)$, így viszont $s \leq 1$, hiszen $i \geq 2$ esetén $2^{2^{i-1}} + 1 \equiv 1 \pmod 4$. Ez azt jelenti, hogy az n szám $2^\alpha 3^\beta$ alakú. Ha $\beta = 0$, akkor $\alpha \geq 3$ miatt $3 = 2^2 - 1$ valódi (és n-hez relatív prím) osztója $2^{2^{\alpha-1}} - 1 = 2^{\varphi(n)} - 1$-nek, ellentmondás. Ha $\beta = 1$, akkor $\alpha \geq 2$ miatt $5 \mid 2^{2^2} - 1 \mid 2^{\varphi(n)} - 1$, ellentmondás. Ha pedig $\beta \geq 2$, akkor $7 = 2^3 - 1 \mid 2^{\varphi(n)} - 1$, ugyancsak ellentmondás.

Megjegyzés. Több megoldó is úgy fejezte be a bizonyítást, hogy felhasználta $2^{2^5} + 1$ összetettségét (ld. pl. Szalay Mihály: Számelemélet, 65. old.).

II. megoldás. Könnyen látható, hogy elegendő a feladatot páratlan n-re megoldani; azért a továbbiakban feltesszük, hogy n páratlan. Ha $n = p^k$ prímhatvány, akkor $\varphi(n) = p^k - p^{k-1}$ szerint

$$2^{\varphi(n)} - 1 = \left(2^{\left(p^k - p^{k-1}\right)/2} - 1\right)\left(2^{\left(p^k - p^{k-1}\right)/2} + 1\right).$$

E két tényező nem lehet egyszerre p-vel osztható, hiszen a különbségük 2. Feltehető tehát, hogy $n = ab$, ahol a és b 1-nél nagyobb, egymáshoz relatív prím egészek. Ekkor $\varphi(n) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, és $\varphi(a)$, valamint $\varphi(b)$ páros. Így $\dfrac{\varphi(n)}{2}$ osztható $\varphi(a)$-val és $\varphi(b)$-vel, következésképpen

$$2^{\varphi(a)} - 1 \mid 2^{\frac{\varphi(n)}{2}} - 1,$$
$$2^{\varphi(b)} - 1 \mid 2^{\frac{\varphi(n)}{2}} - 1.$$

Az Euler–Fermat tétel szerint

$$a \mid 2^{\varphi(a)} - 1 \mid 2^{\frac{\varphi(n)}{2}} - 1,$$
$$b \mid 2^{\varphi(b)} - 1 \mid 2^{\frac{\varphi(n)}{2}} - 1,$$

így, mivel $(a, b) = 1$, $n \mid 2^{\frac{\varphi(n)}{2}} - 1$. Tehát, ha p tetszőleges prímosztója $2^{\frac{\varphi(n)}{2}} + 1$-nek, akkor p nem oszthatja a 2-vel kisebb $2^{\frac{\varphi(n)}{2}} - 1$ számot, így n-et sem.

Dombi Gergely (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján