I. megoldás. Legyen tetszőleges n pozitív egészre

$$A_n=\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\dots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}.$$

Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy minden n pozitív egészre $A_n<\sqrt{n}+1$. Ez $n=100$ esetén éppen a kívánt állítás.

Ha $n=1$, akkor $A_n=1$ és $\sqrt{n}+1=2$, tehát állításunk igaz. Ha pedig valamely 1-nél nagyobb n-re $A_{n-1}<\sqrt{n-1}+1$, akkor

$$A_n=\sqrt{n+A_{n-1}}<\sqrt{n+\sqrt{n-1}+1}<\sqrt{n+2\sqrt{n}+1}=\sqrt{n}+1.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Mann Zoltán (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

II. megoldás. Ha (1) bal oldalán mindegyik szám helyére 110-et, a legbelső négyzetgyökjelbe pedig 121-et írunk, a számot – a négyzetgyökfüggvény szigorú monotonitása miatt – növeljük:

$$\sqrt{100+\sqrt{99+\sqrt{98+\dots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}<\sqrt{110+\sqrt{110+\sqrt{110+\dots+\sqrt{110+\sqrt{121}}}}}.$$

A legbelső négyzetgyök értéke 11. Ha ezt a helyére beírjuk, pontosan ugyanezt a kifejezést kapjuk, de eggyel kevesebb négyzetgyökvonással. Ezt az átalakítást 100-szor elvégezve azt kapjuk, hogy a bal oldalon éppen 11 áll.

Mészáros Judit (Galánta, Magyar Tannyelvű Gimn., III. o.t.) megoldása alapján

III. megoldás. Azt az egyszerű tényt felhasználva, hogy $x\ge 1$ esetén $\sqrt{x}\le x$,

$$\sqrt{100+\sqrt{99+\sqrt{98+\dots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}\le\sqrt{100+\sqrt{99+\sqrt{98+97+96+\dots+2+1}}}<$$

$$<\sqrt{100+\sqrt{99+\sqrt{98^2}}}=\sqrt{100+\sqrt{197}}<\sqrt{100+15}<11.$$

Makai Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

Megjegyzés. Több versenyző az

$$a_k^{(n)}=\sqrt{n+\sqrt{n+\dots+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$$

(a jobb oldalon k darab gyökjel van) sorozat határértékével becsülte felülről (az I. megoldás jelölésével élve) A_n-et. Könnyen ellenőrizhető, hogy rögzített n esetén a sorozat szigorúan monoton nő és felülről korlátos, tehát konvergens. A határértéket az

$$a_{k+1}^{(n)}=\sqrt{n+a_k^{(n)}}$$

rekurzióból lehet kiszámítani. Ha a határértéket B_n-nel jelöljük, a rekurzió bal oldala B_n-hez, jobb oldala $\sqrt{n+B_n}$-hez tart, tehát $B_n=\sqrt{n+B_n}$. Ennek az egyenletnek egy pozitív megoldása van:

$$B_n=\frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}.$$

Mindezekből következik, hogy

$$A_n\le a_n^{(n)}<\lim_{k\to\infty}a_k^{(n)}=B_n=\frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}=\sqrt{n+\frac12}+\frac12. \tag{2}$$

Ez a becslés körülbelül 0,5-del jobb, mint az I. megoldásban bizonyított, és teljes indukcióval is igazolható.

A (2) becslés már „majdnem” pontos. Nem nehéz teljes indukcióval bebizonyítani, hogy

$$A_n\ge\sqrt{n-\frac34}+\frac12. \tag{3}$$

A (2) és (3) becslések különbsége:

$$\left(\sqrt{n+\frac12}+\frac12\right)-\left(\sqrt{n-\frac34}+\frac12\right)=\sqrt{n+\frac12}-\sqrt{n-\frac34}=$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+\sqrt{n-\frac{3}{4}}} < \frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{n}+\sqrt{\frac{n}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Az alsó és felső becslés különbsége tehát 0-hoz tart.

Az (2) és (3) becslést $n=100$-ra felírva,

$$10{,}46 < \sqrt{99{,}25}+0{,}5 < A_{100} < \sqrt{100{,}5}+0{,}5 < 10{,}53.$$