Jelöljük a gúla csúcsait A, B, C, D-vel úgy, hogy az A-ban találkozó élek legyenek páronként merőlegesek, és $AB=2$, $AC=6$ és $AD=4$cm legyen.

Tekintsük a gúla köré írt gömböt. Ezt az ABC sík egy körben metszi. Mivel az ABC háromszög derékszögű, ezért ennek a körnek a középpontja a BC él felezőpontja. Ekkor viszont az A-nak a BC felezőpontjára vonatkozó A' tükörképe is rajta van ezen a körön, s így egyúttal a gúla köré írt gömbön is. Ugyanígy kapjuk, hogy A-nak a BD felezőpontjára vonatkozó A'' és a CD felezőpontjára vonatkozó A''' tükörképe is a gömb egy-egy pontja (*1. ábra*). A tükrözés miatt az $ABA'C$, $ABA''D$ és $ACA'''D$ négyszögek téglalapok, amelyek síkjai – AB, AC és AD merőlegessége miatt – egymásra páronként merőlegesek. Ez a hét pont tehát egy olyan téglatest hét csúcsa, amely téglatest körülírt gömbje megegyezik az $ABCD$ gúla körülírt gömbjével. A téglatest körülírt gömbjének sugara éppen a testátló fele. A testátló négyzete megegyezik az egy csúcsban találkozó élek négyzetének összegével, tehát a körülírt gömb sugara:

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2+6^2}=\sqrt{14}\text{ cm}.$$

Jelöljük a beírt gömb középpontját O-val, sugarát r-rel. Kössük össze O-t a gúla csúcsaival. Így a gúlát négy olyan tetraéderre bontottuk fel, amelyek alaplapjai az eredeti gúla lapjai, az ezekhez tartozó magasságuk pedig r (*2. ábra*). E négy kis tetraéder térfogatának összege megegyezik a gúla térfogatával. Az A-ban találkozó élek merőlegessége miatt a gúla térfogata $\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 4\cdot 6=8\text{ cm}^3$, tehát:

$$8=\frac{1}{3}r\left(T_{ABC}+T_{ABD}+T_{ACD}+T_{BCD}\right).$$

A háromszögek közt három derékszögű van, ezek területe egyszerűen kiszámolható az élek ismeretében. A BCD háromszög oldalait Pitagorasz tételét használva kaphatjuk meg: ha $AB=2$, $AC=6$ és $AD=4$, akkor $BC=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}$, $BD=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$ és $CD=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$. Az oldalak ismeretében a háromszög területét Héron képletével számítjuk ki:

$$\begin{gathered}4T_{BCD}=\\=\sqrt{(\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{52})(\sqrt{40}+\sqrt{20}-\sqrt{52})(\sqrt{40}-\sqrt{20}+\sqrt{52})(-\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{52})}=\\=\sqrt{(8+2\sqrt{800})(-8+2\sqrt{800})}=\sqrt{3136}=56.\end{gathered}$$

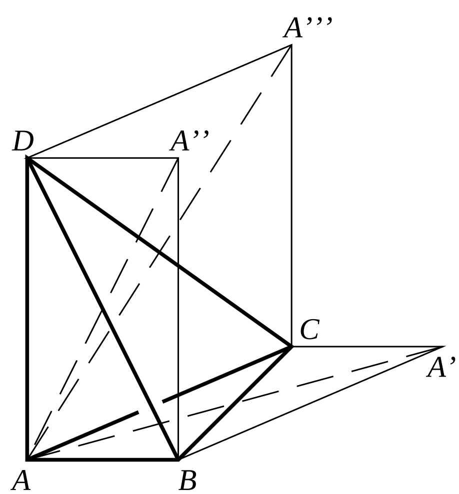
Ezt beírjuk a térfogatra felírt egyenletbe:

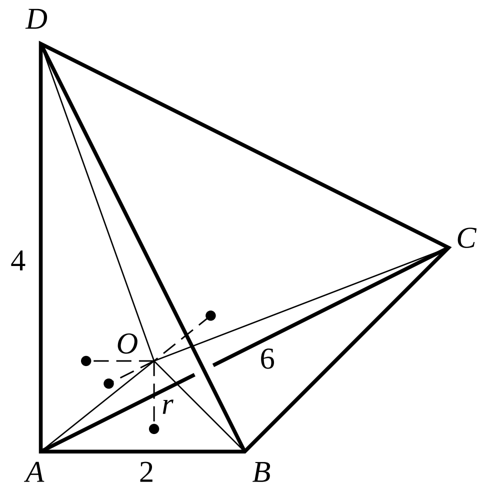
$$8=\frac{1}{3}r(8+4+12+14),$$

amiből $r=\frac{2}{3}$ cm.

Tehát a gúla körülírt gömbjének sugara $\sqrt{14}$ cm, a beírt gömbjének sugara pedig $\frac{2}{3}$ cm.

Zámbó Tibor (Kaposvár, Római Katolikus Gimn., II.o.t.)





D
C
4
O
6
r
A
2
B