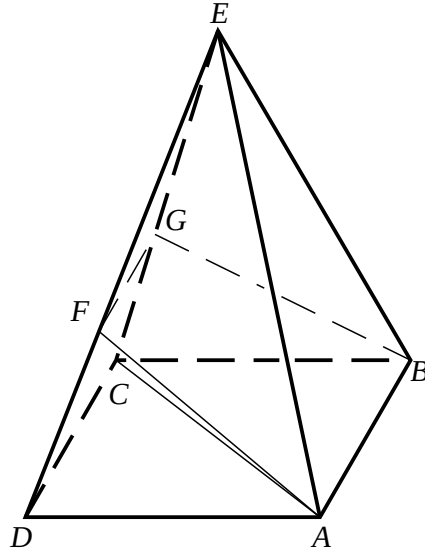




Legyenek a gúla csúcsai A, B, C, D, E és AB alapélre illeszkedő sík messe a DCE lapot az aranymetszés szerint az FG szakaszban (lásd az ábrát). Az ACE pontokon átmenő sík nyilván felezi a gúla térfogatát. Ezért elég megmutatnunk, hogy az $ACDE$ gúla térfogata egyenlő az $AFGBE$ gúla térfogatával. Bevezetjük a következő típusú jelöléseket: pl. V_{ACDE} jelentse az A, C, D, E csúcsokkal rendelkező gúla térfogatát, T_{CDE} pedig a CDE háromszög területét. Legyen továbbá az A csúcs távolsága a CDE laptól m_1 , E távolsága az $ABGF$ négyszög síkjától m_2 , az $ABGF$ trapéz magassága m_3 . Előbbi megjegyzésünk szerint elég bebizonyítani, hogy

$$(1) \quad V_{ACDE} = V_{AFGBE},$$

vagy

$$(2) \quad \frac{V_{ACDE}}{V_{AFGE}} = \frac{V_{AFGBE}}{V_{AFGE}}.$$

Ezt úgy tesszük, hogy kiszámítjuk (2) mindkét oldalát. A bal oldal:

$$\frac{V_{ACDE}}{V_{AFGE}} = \frac{T_{CDE} \cdot m_1}{T_{GFE} \cdot m_1} = \left(\frac{CD}{FG} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2},$$

ahol fölhasználtuk, hogy hasonló háromszögek területének aránya az oldalak arányának négyzete.

A (2) jobb oldala:

$$\frac{V_{AFGBE}}{V_{AFGE}} = \frac{T_{ABGF} \cdot m_2}{T_{AGF} \cdot m_2} = \frac{\frac{AB+FG}{2} \cdot m_3}{\frac{FG \cdot m_3}{2}} = \frac{AB}{FG} + 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ezzel beláttuk (1)-et, ami ekvivalens a feladat állításával.

Horváth István (Fonyód, Mátyás Király Gimn., III. o.t.)

Megjegyzés. Több megoldónk a feladatot általánosította paralelogramma alapú gúlára, illetve tetszőleges $\frac{FG}{AB}$ esetén meghatározta, hogy az AB alapélre illeszkedő sík milyen arányú részekre osztja a gúla térfogatát.