

A feladatot általánosabban oldjuk meg: tegyük föl, hogy a csapatok k csapatból állnak, és azok jutnak tovább, akik legfeljebb m vereséget szenvednek. A kérdés pedig az eredeti: hányan juthatnak tovább egy csoportból? Az $m \geq k - 1$ esetben persze mindenki továbbjut, így a továbbiakban tegyük föl, hogy $m \leq k - 2$ és ennek megfelelően $k \geq 3$.

Jelölje a továbbjutók számát t , és vizsgáljuk meg először azokat a mérkőzéseket, amelyeket ők játszottak egymás között. Látható, hogy ez $\frac{t(t-1)}{2}$ mérkőzést jelent: mindenki $t-1$ másikkal játszott, ez $t(t-1)$, viszont ekkor mindent pontosan kétszer számoltunk. Minden mérkőzésnek volt vesztese, ezért a t továbbjutó csapat összesen legalább $\frac{t(t-1)}{2}$ vereséget szenvedett. Közülük senki sem kapott ki m -nél többször, ezért

$$\frac{t(t-1)}{2} \leq tm$$

teljesül. Ez nyilván fennáll a $t = 0$ esetben, máskor pedig a

$$t \leq 2m + 1$$

alakra hozható. Mivel ennek a $t = 0$ is megfelel, így tehát azt kaptuk, hogy a továbbjutók száma legfeljebb $2m + 1$ lehet.

Hasonló megfontolást alkalmazunk a kiesők egymás közötti mérkőzéseire. Közülük mindegyik csapat legfeljebb t továbbjutótól kaphatott ki, s mivel összesen legalább $m + 1$ -szer veszített (hiszen kieső), így legalább $m - t + 1$ kiesőtől is vereséget szenvedett. Azaz a kiesők egymás között összesen legalább $(k - t)(m - t + 1)$ -szer veszítettek. Ez nem lehet több, mint az általuk egymással játszott összes mérkőzésük száma, vagyis

$$\frac{(k-t)(k-t-1)}{2} \geq (k-t)(m-t+1).$$

Ez $k \neq t$ esetén (ekkor ugyanis $k > t$, hiszen $k \geq t$ nyilvánvaló)

$$k - t - 1 \geq 2m - 2t + 2, t \geq 2m - k + 3$$

alakot ölt, s ez tartalmazza a $k = t$ esetet is ($k - 2 \geq m$ alapján).

Azt kaptuk tehát, hogy a lehetséges t számokra

$$2m - k + 3 \leq t \leq 2m + 1$$

teljesül. Most megmutatjuk, hogy ezek valóban jók is: minden ilyen t -re megadjuk a mérkőzések olyan kimenetelét, amelynél t csapat jut tovább. Ehhez először kijelölünk t csapatot – ők lesznek a továbbjutók, a többiek kiesnek. A köztük levő mérkőzések eredményét is úgy választjuk meg, hogy mindig a továbbjutó csapat legyen a győztes.

Vizsgáljuk most a továbbjutók egymás közti meccseit. Tekintsük először a $t = 2m + 1$ esetet. A csapatokat körbeállítjuk; mindenki legyőzi a tőle jobbra álló m csapatot, a többitől pedig vereséget szenved. Ezzel biztosítottuk, hogy ez a t csapat valóban továbbjut. A $t < 2m + 1$ esetekben a következőképpen járunk el: képzeletben $2m + 1$ csapatra egészítjük ki a továbbjutókat, köztük a már leírt módon elrendezzük az eredményeket, majd a valójában tovább nem jutó csapatok győztes mérkőzéseinek eredményét megfordítjuk. Ez valóban jó, hiszen ekkor a t csapat egyike sem veszített m -nél többször.

Most vizsgáljuk a kiesők mérkőzéseit. Ezúttal a $t = 2m - k + 3$ esettel kezdjük. Ekkor $k - (2m - k + 3) = 2k - 2m - 3$ kieső van. Az előbbi „körbeállítós” módszerrel elérhető, hogy a kiesők egyenként $k - m - 2$ meccset veszítenek el egymás ellen. Ezenkívül a továbbjutóktól is kikapnak, tehát összesen $k - m - 2 + 2m - k + 3 = m + 1$ -szer veszítenek, és ezzel kiesnek. A nagyobb t -kre kevesebb kieső lesz, úgyhogy a már látott módon képzeletben kiegészítjük őket $2k - 2m - 3$ -ra, beosztjuk a mérkőzéseket, majd a valójában továbbjutók egymás közti eredményeit visszaállítjuk a már rögzítettekre, a kiesőktől elszenvedett vereségeiket pedig győzelemre módosítjuk. Ezáltal a $k - t$ kieső mindegyike legalább $m + 1$ -szer veszített, és a továbbjutók korábban már meghatározott eredményei sem változtak.

Figyelmesen megnézve, eddigi gondolatmenetünk kisebb pontosításra szorul. Előfordulhat ugyanis, hogy $2m + 1 > k$ vagy $2m - k + 3 < 0$ teljesül, és az ilyen t -k nyilván nem lehetségesek. Tehát legfeljebb a

$$\max(0, 2m - k + 3) \leq t \leq \min(k, 2m + 1)$$

állítás lehet igaz. Ekkor viszont a konstrukcióban is gondok lépnek föl: amikor a t továbbjutót $2m + 1$ -re egészítjük ki, talán nincs is annyi csapat, s ugyanez vonatkozhat a kiesők $2k - m - 3$ -ra való kiegészítésre. A következő megfontolással azonban ezek a problémák kiküszöbölhetők.

Ha több csapatra kell kiegészíteni, mint amennyi van, akkor ehhez „fiktív” csapatokat is használunk. Ugyanúgy kiosztjuk a mérkőzések eredményeit, majd először elhagyjuk a fiktív csapatokat (mérkőzéseikkel együtt), utána pedig a többieket (mérkőzéseiket korrigálva). A továbbjutók kiegészítésekor ez a művelet nem növeli a kiválasztott t csapat vereségeinek számát, a kiesőkénél pedig a győzelmeiket. Azaz, a továbbjutásra szánt t csapatnak az elhagyás után is legfeljebb m veresége lesz, a $k - t$ másikkal pedig legfeljebb $(k - 1) - (m - 1)$ győzelme, vagyis az a t csapat továbbjut, a többi pedig nem.

Ezzel tehát minden t -re megadtuk a bajnokság egy megfelelő kimenetelét, így módon a feladatot megoldottuk. A kért $k = 5, m = 1$ és $k = 6, m = 1$ esetben a továbbjutók számára

$$\max(0, 2 - 5 + 3) = 0 \leq t \leq 3, \quad \text{illetve} \quad \max(0, 2 - 6 + 3) \leq t \leq 3$$

teljesül, azaz 0, 1, 2 vagy 3 csapat juthat tovább.

Pap Gyula (Debrecen, Fazekas M. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Sok megoldó csak a továbbjutók *maximális* számát határozta meg, ezért csak részpontszámot kapott. Nem kapott pontot, aki *csak* ábrát küldött. Természetesen azok, akik az eredeti feladatot a konkrét esetre (a megadott megoldáshoz hasonló gondolatmenettel) megoldották, 5 pontot kaptak.