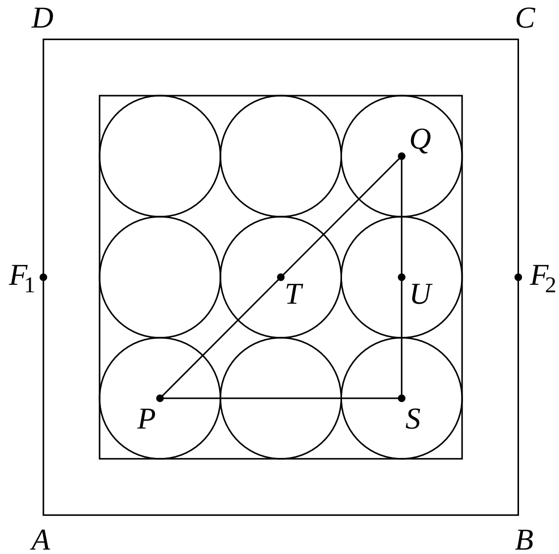
A gömböket burkoló $ABCDE$ gúla alapja az $ABCD$ négyzet, csúcsa E. Térfogatának kiszámításához ismerni kell a gúla magasságát és a négyzet oldalának hosszát.



1. ábra

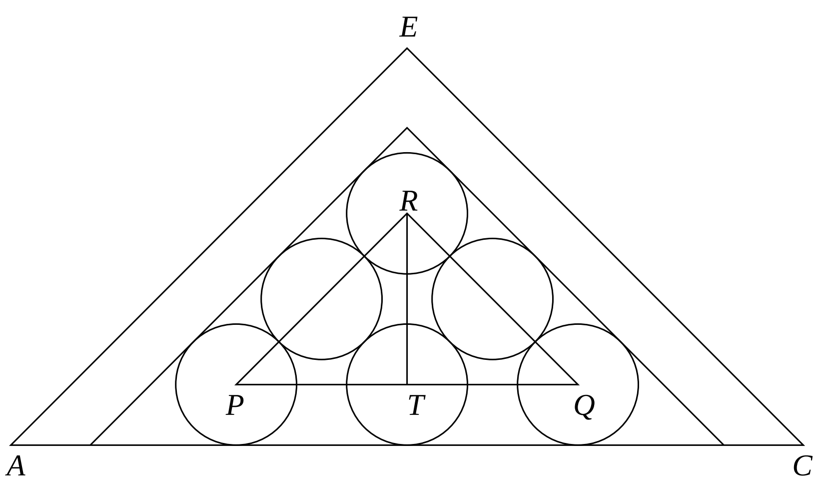
Az alapsíkon elhelyezkedő, egymást érintő 9 darab egységsugarú gömb középpontjai az alapsíktól 1 cm magasságban, az alappal párhuzamos síkon helyezkednek el. Felülnézetből (a metsző sík 1 cm-rel magasabban van) az *1. ábrán* látható. Az ábráról leolvashatjuk, hogy $PS = QS = 4$ cm, PSQ egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $PQ = 4\sqrt{2}$.

Fektessünk az A, E, C pontokon keresztül egy síkot. A sík a gúlát egyenlő szárú háromszögben, a gömböket főkörökben metszi, a *2. ábra* szerint (elölnézet), ahonnan

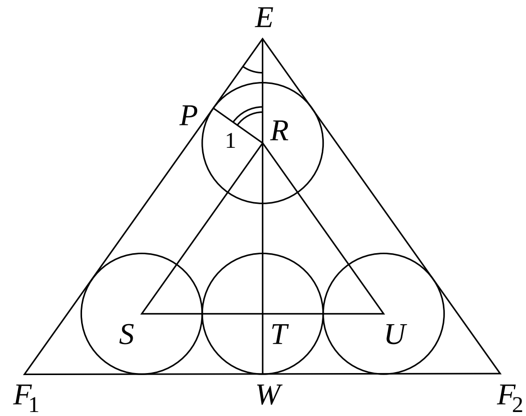
$$PR = RQ = 4, \quad PT = \frac{1}{2}PQ = 2\sqrt{2}, \quad RT \perp PQ,$$

így

$$RT = \sqrt{4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}.$$



2. ábra



3. ábra

Az AD él felezőpontja legyen F_1, a BC él felezőpontja F_2. Fektessünk az F_1, E, F_2 pontokon keresztül egy síkot. A síkmetszet (elölnézetből) a *3. ábrán* látható.

$$ST = 2, \quad TW = 1, \quad TR = 2\sqrt{2} \quad \text{(az előzőkből)},$$
$$RS = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{3}.$$

A PER háromszög hasonló a TRS háromszöghoz; a hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, ezért $ER = \sqrt{3}$. A gúla magassága tehát $m = 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Alapéle az F_1EW, SRT háromszögek hasonlóságából:

$$\frac{a}{2} : 2 = m : 2\sqrt{2} \qquad \to \qquad a = \frac{2m}{\sqrt{2}}.$$
$$V_{\text{gúla}} = \frac{\left(\frac{2m}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot m}{3} = \frac{2m^3}{3}, \qquad V_{\text{gömbök}} = \frac{56\pi}{3},$$
$$\frac{V_{\text{gömbök}}}{V_{\text{gúla}}} = \frac{56\pi}{2\left(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^3} \approx 0{,}5116.$$

Tehát a gömbök térfogatának összege nagyjából a fele a gúla térfogatának.

Förhécz András (Székesfehérvár, Teleki Blanka Hatosztályos Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján