

I. megoldás. Számítsuk ki a sorozat első néhány elemét:

$$a_1 = \sqrt{2}; a_2 = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{6} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{1} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}; a_3 = \frac{\sqrt{3}(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) - 1}{(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) + \sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{6} - 5)(2\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(2\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{(2\sqrt{6} - 5)(2\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2 - 3} = \frac{(2\sqrt{6} - 5)(2\sqrt{2} + \sqrt{3})}{-1} = (5 - 2\sqrt{6})(2\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

Tehát $a_7 = a_1$. Mivel a rekurzió minden elemet az előzővel definiál az indextől függetlenül, innen kezdve a sorozat periodikus: $a_{n+6} = a_n$ tetszőleges n pozitív egészre.

Gombos László (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., IV. o.t.)

II. megoldás. A sorozat rekurziója hasonlít a kotangens-függvény addíciós tételére:

$$\operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}.$$

Legyen α olyan valós szám, amelyre $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2}$. Azt állítjuk, hogy minden n -re

$$a_n = \operatorname{ctg} \left(\alpha + (n - 1) \frac{\pi}{6} \right).$$

(Mivel $-\sqrt{2}$ nem azonos $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ egyikének kotangensével sem, a jobb oldal mindig értelmes.)

Ha $n = 1$, akkor állításunk α választása miatt igaz. Ha pedig

$$a_n = \operatorname{ctg} \left(\alpha + (n - 1) \frac{\pi}{6} \right),$$

akkor

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{3}a_n - 1}{a_n + \sqrt{3}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \operatorname{ctg} \left(\alpha + (n - 1) \frac{\pi}{6} \right) - 1}{\operatorname{ctg} \left(\alpha + (n - 1) \frac{\pi}{6} \right) + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}} = \operatorname{ctg} \left(\left(\alpha + (n - 1) \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{ctg} \left(\alpha + n \frac{\pi}{6} \right).$$

Az állításunk tehát igaz.

Az (a_n) sorozat periodikussága ezután a kotangens-függvény periodikusságából következik. Mivel a kotangens-függvénynek π a periódusa,

$$a_{n+6} = \operatorname{ctg} \left(\alpha + (n + 5) \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{ctg} \left(\alpha + (n - 1) \frac{\pi}{6} + \pi \right) = \operatorname{ctg} \left(\alpha + (n - 1) \frac{\pi}{6} \right) = a_n.$$

Koblinger Egmont (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

Megjegyzés. Ha a_0 -nak bármilyen, 0-tól, $\pm\sqrt{3}$ -tól és $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ -tól különböző számot választunk, a sorozat periodikus lesz. Ez mindkét megoldás módszerével igazolható.