

Alakítsuk át a bal oldali összeg első tagját a következőképpen:

$$\frac{T}{\sqrt{a^2b^2 - 4T^2}} = \sqrt{\frac{T^2}{\frac{4T^2}{\sin^2 \gamma} - 4T^2}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{4}{\sin^2 \gamma} - 4}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \gamma}{4 \cos^2 \gamma}} = \frac{1}{2} |\operatorname{tg} \gamma| = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma,$$

(felhasználtuk, hogy $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, így a nevező sehol sem zérus.) A másik két tagot hasonlóan alakítva a bizonyítandóval ekvivalens állítás:

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \text{azaz } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq 3\sqrt{3}. (1)$$

Mivel a $\operatorname{tg} x$ függvény a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon konvex, Jensen tétele szerint

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq 3 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3},$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\alpha = \beta = \gamma$. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Maróti Gábor (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., IV. o.t.)

Megjegyzés. Több megoldónk az (1) állítást a következőképpen igazolta: Ismeretes, hogy bármely nem derékszögű háromszög szögeire

$$(2) \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

Mivel a háromszög hegyesszögű, a szögek tangense pozitív, és így

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}, \quad \text{amiből (2) alapján: } \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)^3}{27} \geq \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma, \quad \text{azaz } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma$, tehát amikor a háromszög szabályos.